

類 科：資訊處理
科 目：資料結構
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、考慮數字1到 n ，若將其順序重新排置，每個排列順序都稱作一個排列或置換 (Permutation)，例如5 1 4 3 2是1 2 3 4 5的一個排列。我們可以將一個數字1到 n 的排列視為一個順序的映射 P ，則前述例子可表示為 $P(5)=1$ 、 $P(1)=2$ 、 $P(4)=3$ 、 $P(3)=4$ 、 $P(2)=5$ 。當然，1 2 3 4 5也是1 2 3 4 5的一個排列。在一個數字1到 n 的排列 P 中，若一對數字 i 和 j ， $1 \leq i < j \leq n$ ， $P(j) < P(i)$ ，也就是在排列 P 中較大的數字 j 出現在較小的數字 i 左邊 (前面)，我們稱此對數字為反向 (Inversion)，而排列 P 的反向數 (Inversion number) 則定義為排列 P 中反向的總數量。請回答下列問題：

- (一)數字1到 n 的何種排列會有最大的反向數？最大反向數是多少？(5分)
- (二)若給定一個數字1到 n 的排列 P ，請提出一個線性遞迴 (Linear Recursive) 的方式來算出排列 P 的反向數，並提供虛擬碼 (Pseudo-code) 與時間複雜度分析。(10分)

二、優先佇列 (Priority Queue) 是依管理物件的優先權來考量，在此我們考慮管理物件的鍵值 (Key) 愈小其優先權愈高，兩個主要操作則分別為加入 (Insert) 與擷取最小者 (Delete_Min)。

- (一)請說明如何利用優先佇列對 n 個鍵值進行排序。(6分)
- (二)我們使用一個未排序的陣列 (Unsorted Array) 來管理鍵值以實現一個優先佇列，請回答下列問題：(10分)
 - (1)若有 n 個鍵值，請說明兩個主要操作 (加入 (Insert) 與擷取最小者 (Delete_Min)) 的時間複雜度。
 - (2)請判斷下面的敘述是否為真，並請說明原因：
若以此優先佇列進行排序 (Sorting)，其所對應的排序原理為插入排序 (Insertion Sort)。
- (三)二元堆積 (Binary Heap) 是一個優先佇列的資料結構，因為我們考慮鍵值小的物件有高的優先權，所以又可稱為最小堆積 (Minimum Heap)。(14分)
 - (1)在結構上最小堆積為一個完全二元樹 (Complete Binary Tree)，若使用一個陣列來實作最小堆積，陣列中物件的鍵值放置如下，請描述此陣列對應的完全二元樹 (以樹狀結構表示)。

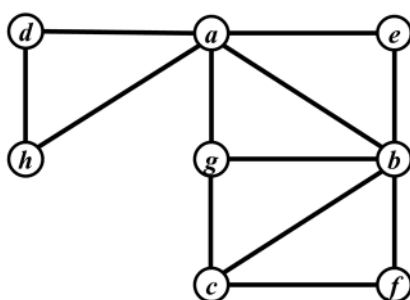
Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Key	35	18	42	24	7	14	25	12	38	21

- (2)請說明二元堆積中何謂堆積特性 (Heap Property) ？
- (3)前揭(1)中的完全二元樹並未有堆積特性，請將其進行堆積化 (Heapify)，並以陣列表示出堆積化後的最小堆積所對應之完全二元樹。

三、請回答下列關於AVL樹 (AVL Tree) 的問題：

- (一)我們欲將所管理的鍵值 (Key) 依序列出，請問是否可以利用一個AVL樹對鍵值來進行排序 (Sorting)？若不行，請說明原因；如果可以，請描述方法及時間複雜度。(5分)
- (二)請提供一個線性時間的演算法來判斷一個二元搜尋樹是否為AVL樹。(10分)
- (三)在AVL樹上進行一個加入 (Insert) 操作後，是否最多只需要一次的重構 (Restructuring) 即可恢復其平衡的特性？請說明原因。(10分)

四、若我們用相鄰矩陣 (Adjacency Matrix) M 來表示圖一中的無向圖 $G=(V, E)$ ，請考慮下面的問題：



圖一、無向圖 $G=(V, E)$

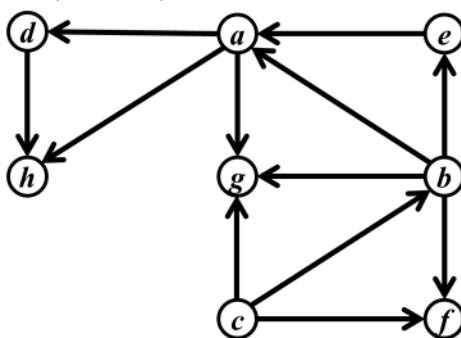
(一)對於無向圖 $G=(V, E)$ ：(12分)

(1)請給出對應的相鄰矩陣 M 。

(2)以字母順序為考量進行深度優先搜尋 (Depth-First Search, DFS)，請由節點 a 開始，描述此深度優先搜尋所產生的深度優先樹 (DF-tree)。

(二)請說明在用相鄰矩陣 (Adjacency Matrix) 表示的無向圖上，進行深度優先搜尋的時間複雜度，其中節點與邊的數量分別為 $|V|=n$ 與 $|E|=m$ 。(8分)

(三)若將圖一無向圖 $G=(V, E)$ 中的邊給予方向成為如圖二中的有向圖 (Directed Graph) G' ：(10分)



圖二、有向圖 G'

(1)有向圖 G' 沒有迴圈 (Cycle)，是一個無迴圈有向圖 (Directed Acyclic Graph, DAG)，所以存在節點的拓撲排序 (Topological Sort)，請對 G' 給出一個拓撲排序 (Topological Sort)。

(2)請給一個方法來判斷一個有向圖是否沒有迴圈。