

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、設 $a$ 和 $b$ 為實數，試求下列對稱矩陣為正定（positive definite）的充分必要條件，並證明其結果。（20分）

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

二、求下列微分方程系統的解。（20分）

$$u'(t) = 2u(t) - v(t) + e^t$$

$$v'(t) = 3u(t) - 2v(t) - e^t$$

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 2$$

三、設 $\vec{F}$ 及 $\vec{G}$ 為三維向量場，證明下列散度、旋度公式。（20分）

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\operatorname{curl} \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\operatorname{curl} \vec{G})$$

四、(一)寫出 $2L$ 週期實函數 $f(x)$ 的傅立葉級數公式。（6分）

(二)設 $\phi(x)$ 為(一)中之傅立葉基底函數， $\int_{-L}^L \phi(x)^2 dx$ 為何？（6分）

(三)使用(一)計算 $\int_{-L}^L f(x)^2 dx$ 。（8分）

五、求下列偏微分方程的通解 $w$ 。（20分）

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = 0$$