大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試試題
數學乙

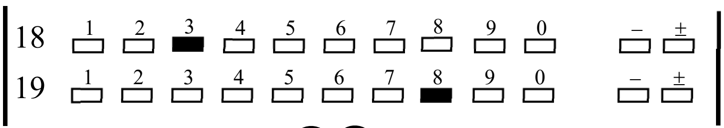
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

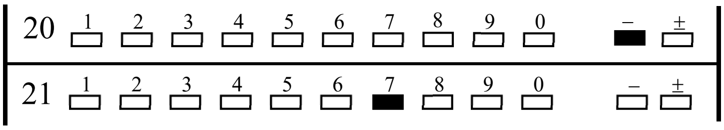
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 矩陣$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$與下列哪一個矩陣相等？

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

2. 某畢業班由 8 位同學負責畢旅規劃，分成 A、B、C 三組，且三組分別由 3 人、3 人、2 人組成。8 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這 8 位同學總共有幾種分組方式？

(1) 140 種　(2) 150 種　(3) 160 種　(4) 170 種　(5) 180 種

3. 為了瞭解 IQ 和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了 5 個人的腦容量（以 10,000 像素為單位），連同他們的 IQ 列表如下：

腦容量 (X)	90	95	91	88	106
IQ (Y)	90	100	112	80	103

已知上表中的 X 之平均值為 $\mu_X = 94$，Y 之平均值為 $\mu_Y = 97$，腦容量 (X) 與 IQ (Y) 的相關係數為 $r_{X,Y}$。根據上述表格，試判斷 $r_{X,Y}$ 的值最可能是下列哪一個選項？

(1) $r_{X,Y} \le -1$

(2) $-1 < r_{X,Y} < -0.5$

(3) $r_{X,Y} = 0$

(4) $0 < r_{X,Y} < 0.5$

(5) $r_{X,Y} \ge 1$

二、多選題（占 24 分）

說明：第 4 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。

(1) $f(0) > 0$

(2) $f(1)f(2) > 0$

(3) 若 $f(x)-1=0$ 有實根，則 $f(x)-2=0$ 有實根

(4) 若 $f(x)-1=0$ 有重根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根

(5) 若 $f(x)-1=0$ 有兩相異實根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 有實根

5. 數列 $a_1, a_2, \cdots$ 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3, a_2 = 2$。試選出正確的選項。

(1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$

(2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{100} a_n > 9$

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

（一）當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

（二）當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

（三）當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為5點、2點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試選出正確的選項。

(1) 投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為 $\frac{1}{2}$

(2) 投擲骰子一次，棋子的坐標之期望值為 0

(3) 投擲骰子二次，棋子的坐標有可能為 -5

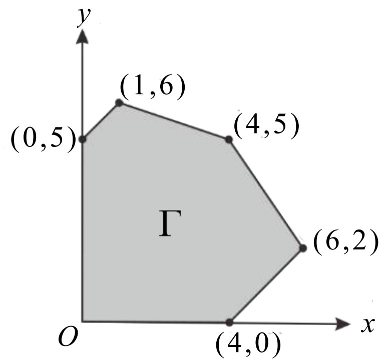
(4) 投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為正的機率為 $\frac{4}{9}$

(5) 投擲骰子三次，棋子在原點的機率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

三、選填題（占 32 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（7–16）。 2.每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

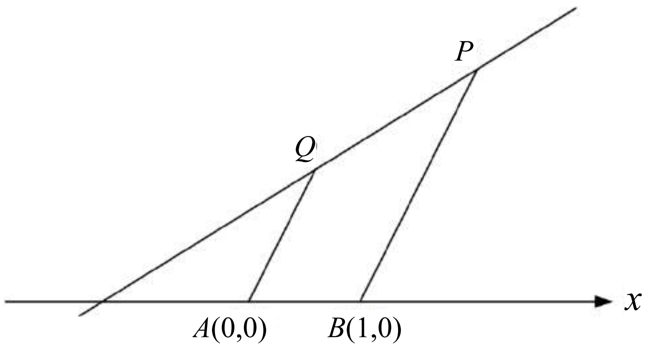
A. 坐標平面上有一個多邊形區域 Γ（含邊界），如圖所示。若 $k>0$，直線 $7x+2y=k$ 與兩坐標軸圍成一個三角形區域，使得多邊形區域 Γ 落在此三角形區域（含邊界）內，則最小正實數 $k=$ _⑦⑧_ 。



B. 若隨機變數 X 的可能值為 1、2、3、4，其出現的機率 $P(X=k)$ 與 $\frac{1}{k}$ 成正比，則機率 $P(X=3)$ 為 $\dfrac{⑨}{⑩⑪}$ 。（化為最簡分數）

C. 一家公司僅有經理、秘書、業務三位成員，若只有秘書加薪 10%，則全公司薪資總支出增加 3%；若只有業務加薪 20%，則全公司薪資總支出增加 4%。如果只有經理減薪 15%，那麼全公司薪資總支出將減少 ⑫.⑬ %。

D. 坐標平面上有一梯形，四個頂點分別為 $A(0,0), B(1,0), P, Q$，其中過 P, Q 兩點的直線方程式為 $y=2x+4$，下圖為示意圖。若 Q 點的坐標為 $(a, 2a+4)$，其中實數 $a\geq 0$，則梯形 $ABPQ$ 的面積為 $\dfrac{⑭}{⑮}a+⑯$。（化為最簡分數）



——— 以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 ———

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下，n天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為

$$P_n = P_0(1+r)^n \text{，其中} P_0 \geq 1 \text{且} r > 0 \text{。}$$

試回答下列問題：

(1) 已知 $A=\dfrac{\log P_5 - \log P_2}{3}$，$B=\dfrac{\log P_8 - \log P_6}{2}$，試說明 $A=B$。（4 分）

(2) 已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔16天總感染人數會增加為10倍，試求 $\dfrac{P_{20}}{P_{17}}\times\dfrac{P_8}{P_6}\times\dfrac{P_5}{P_2}$ 的值。（5 分）

(3) 承(2)，試求 $\dfrac{\log P_{20} - \log P_{17}}{3}$ 的值。（4 分）

背 面 還 有 試 題

二. 在坐標平面上，兩平行直線 L_1, L_2 的斜率都是 2 且距離為 5，又點 $A(2,-1)$ 是 L_1 在第四象限的一點，點 B 是 L_2 在第二象限的一點且 $\overline{AB}=5$。已知直線 L_3 的斜率為 3，通過點 A 且交 L_2 於點 C，試回答下列問題：

(1) 試求直線 AB 的斜率。(2 分)

(2) 試求向量 $\overrightarrow{AB}$。(4 分)

(3) 試求內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值。(3 分)

(4) 試求向量 $\overrightarrow{AC}$。(4 分)

109 學年度指定科目考試
數學乙考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		5
2		1
3		4
4		2,3,4
5		2,3
6		2,4
A	7	4
	8	6
B	9	4
	10	2
	11	5
C	12	7
	13	5
D	14	5
	15	2
	16	5

109 學年度指定科目考試
數學乙考科非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

109 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題 （4 分）

解法一、對數律

由對數律得

$$\log P_n = \log P_0(1+r)^n = \log P_0 + n\log(1+r)$$

因此

$$A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3} = \frac{\log P_0 + 5\log(1+r) - \log P_0 - 2\log(1+r)}{3} = \log(1+r)$$

$$B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2} = \frac{\log P_0 + 8\log(1+r) - \log P_0 - 6\log(1+r)}{2} = \log(1+r)$$

所以 $A = \log(1+r) = B$

解法二、利用斜率

令 $y = \log P_x$ ，則 $y = \log P_0 + x\log(1+r)$ ，

其圖形是斜率為 $\log(1+r)$ 的直線。

又 A 與 B 均表示為該直線的斜率，故 $A = B = \log(1+r)$ 。

第(2)小題（5 分）

由題意知 $P_{16} = 10P_0$ ，即 $P_0(1+r)^{16} = 10P_0$ 或 $(1+r)^{16} = 10$

因此

$$\frac{P_{20}}{P_{17}} \times \frac{P_8}{P_6} \times \frac{P_5}{P_2} = \frac{P_0(1+r)^{20} \times P_0(1+r)^8 \times P_0(1+r)^5}{P_0(1+r)^{17} \times P_0(1+r)^6 \times P_0(1+r)^2} = (1+r)^8 = \sqrt{10}$$

第(3)小題（4 分）

解法一、先化簡再代值

直接計算可得 $\dfrac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\log(1+r)$ ，由第(2)小題知$1+r=10^{\frac{1}{16}}$ ，

得$\log(1+r)=\log 10^{\frac{1}{16}}$ ，所以$\dfrac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\dfrac{1}{16}$

解法二、直接代值計算

以$1+r=10^{\frac{1}{16}}$代入，直接計算得

$$\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\frac{\log(P_0\times 10^{\frac{20}{16}})-\log(P_0\times 10^{\frac{17}{16}})}{3}=\frac{\log 10^{\frac{3}{16}}}{3}=\frac{1}{16}$$

解法三、利用斜率

利用 $\dfrac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}$ 為直線 $y=\log P_x=\log P_0+x\log(1+r)$ 的斜率，可得

$$\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\log(1+r)$$

以$1+r=10^{\frac{1}{16}}$代入，得$\dfrac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\dfrac{1}{16}$

第二題

第(1)小題（2 分）

因為 A 在 L_1 上、B 在 L_2 上、且平行線 L_1 和 L_2 間的距離為 5 恰等於 $\overline{AB}$ ，得知直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_1 。由題意知 L_1 的斜率為 2，因此 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率$=-\dfrac{1}{2}$

第(2)小題（4 分）

解法一、先算 $\overrightarrow{AB}$ 的方向

因為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_1 ，且 L_1 的方向平行於$(1,2)$ ，得知 $\overrightarrow{AB}=t(-2,1)$

由題意知 $\overline{AB}=5$ ，且 B 在第二象限，因此 $\overrightarrow{AB}=5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$

解法二、先算 B 的坐標

因為 $\overline{AB}=5$，所以 $B(x,y)$ 滿足方程式：$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=5$

依題意知 L_1 過 $A(2,-1)$ 且斜率為 2，得知 L_1 的方程式為：$2x-y=5$ 。

令 L_2 的方程式為：$2x-y=k$，因為平行線 L_1 和 L_2 間的距離為 5，得 $\dfrac{|k-5|}{\sqrt{5}}=5$，因此 $k=5\pm5\sqrt{5}$ 。

又直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為：$x+2y=0$，因此 B 為下列聯立方程式中任兩式的解，

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=25\\ \dfrac{|2x-y-5|}{\sqrt{5}}=5\\ x+2y=0\end{cases}$$

因為 B 點在第二象限，解得 $B\left(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$，因此 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

解法三、利用 L_2 參數式求解

因為 L_1 的斜率是 2，$A(2,-1)$ 為 L_1 上一點，L_1 的方程式為：$2x-y-5=0$ 。

因為 L_1、L_2 平行，可設 L_2 的方程式為：$2x-y+k=0$。

又因為兩平行線距離為 5，我們有 $\dfrac{|k+5|}{\sqrt{5}}=5$ 故 $k=-5+5\sqrt{5}$ 或 $k=-5-5\sqrt{5}$ 。

因為 L_2 通過第二象限，故 $k=-5+5\sqrt{5}$，即得 L_2 的方程式為：$2x-y-5+5\sqrt{5}=0$ 。

因為 B 為 L_2 上一點，可設 B 的坐標為 $(t,2t-5+5\sqrt{5})$。

故 $\overrightarrow{AB}=(t-2,2t-4+5\sqrt{5})$，因為 $\overline{AB}=5$，所以 $(t-2)^2+(2t-4+5\sqrt{5})^2=25$

可解得 $t=2-2\sqrt{5}$。故 B 的坐標為 $B(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5})$，可得 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

第(3)小題（3 分）

因為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_2，由內積定義得知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}^2=25$

第(4)小題（4 分）

解法一、利用內積

因為 L_3 的斜率為 3，A 和 C 都在 L_3 上，所以令 $\overrightarrow{AC}=\left(t,3t\right)$。再由第(2)小題和第(3)小題的結論可知

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)\cdot\left(t,3t\right)=25$$

化簡可得 $\sqrt{5}t=25$，解得 $t=5\sqrt{5}$。因此

$$\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right) \text{ 或 } \overrightarrow{AC}=5\sqrt{5}\left(1,3\right)$$

解法二、先算 C 點坐標

依題意知 L_3 過 $A\left(2,-1\right)$ 且斜率為 3，得 L_3 的方程式為：$y=3x-7$。

由第(2)小題知 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，可得知 $B\left(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$，所以 L_2 的方程式為：

$$y=2x+5\sqrt{5}-5$$

C 的坐標為聯立方程式 $\begin{cases} y=3x-7 \\ y=2x+5\sqrt{5}-5 \end{cases}$ 的解，解得 $C\left(x,y\right)=\left(2+5\sqrt{5},-1+15\sqrt{5}\right)$

因此 $\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$

解法三、先算 $\overline{AC}$ 長度

因為 L_3 的斜率為 3，A 和 C 都在 L_3 上，所以 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\left(1,3\right)$ 同方向。由內積定義得知

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(1,3\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\left(1,3\right)\right|}$$

利用第(2)小題得知 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，代入上式可得 $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，

又 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\angle BAC=\overline{AB}=5$，可得 $\overline{AC}=25\sqrt{2}$

因此

$$\overrightarrow{AC}=25\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,3\right)=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$$