代號：41360
頁次：2－1

109年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考 試 別：調查人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子科學組
科　　目：工程數學
考試時間： 2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、有一個週期（period）為2的週期性（periodic）連續時間訊號（continuous-time signal）$x(t)$；在$-1 \le t < 1$的區間內，$x(t) = t^2$。將它的傅立葉級數展開式（Fourier-series expansion）寫成如下所示的型式：

$$x(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(k\omega_0 t\right) + b_k \sin\left(k\omega_0 t\right)\right)$$

（每小題4分，共12分）

㈠ω_0 =？

㈡ A =？

㈢ b_1 =？b_2 =？b_3 =？（註：答案必須三者全對才有得分）

二、考慮如下所示之初始值問題（initial-value problem）：

微分方程式：$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\frac{d}{dx}y(x) - 3y(x) = 2e^{-x}$，初始條件（initial conditions）：$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$（$y'(x)$為$\frac{d}{dx}y(x)$之簡寫）。

㈠求出此微分方程式的齊次解（homogeneous solution）。換句話說，也就是求解：$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\frac{d}{dx}y(x) - 3y(x) = 0$。（7分）

㈡求出原微分方程式的一個特定解（particular solution）。（7分）

㈢求出本初始條件問題的精確解（exact solution）。（6分）

三、考慮如下所示過度求定（over-determined）的線性聯立方程組：

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

求出此線性聯立方程組的最小平方誤差解（least-square-error solution）。（10分）

四、考慮如下所示之矩陣（matrix）：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

㈠求出此矩陣之所有的特徵值（characteristic values，亦稱 eigenvalues）。（8分）

㈡針對每一個特徵值，求出對應的特徵向量（characteristic vectors，亦稱 eigenvectors）。（10分）

五、考慮兩個連續隨機變數（continuous random variables）X 與 Y，其合併機率密度函數（joint probability density function）如下所示：

$$f(x,y)=\begin{cases}A\cdot x\cdot(1+y^2), & for\ 0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

（每小題5分，共20分）

㈠ A =？

㈡若以 $f_X(x)$代表 X 的機率密度函數（probability density function），求出 $f_X(x)$=？

㈢若以 $E(Y)$代表 Y 的期望值（expected value），求出 $E(Y)$ =？

㈣若定義一個新的隨機變數 $Z = X\cdot Y$，而且用 $E(Z)$代表 Z 的期望值（expected value），求出 $E(Z)$ =？

六、考慮複變函數 $f(z) = z^2$，其中 z 為複數，亦可寫成 $z = x + i\cdot y$（x 與 y 為實數，$i=\sqrt{-1}$）。

㈠ $f(z)$可以寫成 $f(z) = f(x + i\cdot y) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$；求出 $u(x, y)$及 $v(x, y)$。（4分）

㈡證明 $u(x, y)$及 $v(x, y)$在整個複數平面上都滿足柯西-黎曼方程式（Cauchy-Riemann equations）。（6分）

㈢在複數平面上，$f(z)$是否為可解析（analytic）函數？（3分）

㈣令 Γ 表示在複數平面上的單位圓之中以逆時針方向從$1+i\cdot 0$走到$0+i\cdot 1$的曲線。計算下列積分的結果：$\int_\Gamma f(z)dz$。（7分）