

大學入學考試中心  
109 學年度指定科目考試試題（補考）  
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
  - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
  - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
  - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

18	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input checked="" type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>
19	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input checked="" type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\frac{\square}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input checked="" type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>
21	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input checked="" type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>

第壹部分：選擇題 (單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題 (占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 考慮兩個函數  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ 、 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 。關於函數的極限，試選

出正確的選項。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$  存在
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$  不存在
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$  不存在
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$  存在
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$  不存在

2. 某質點在數線上移動，已知其位置坐標為  $s(t) = \int_0^t (-x^2 + 6x) dx$ ，其中  $t$  表時間且  $0 \leq t \leq 10$ 。若此質點的速度在時段  $0 \leq t < a$  遞增，且在時段  $a < t \leq 10$  遞減，試選出正確的  $a$  值。

- (1) 3
- (2) 4
- (3) 5
- (4) 6
- (5) 7

3. 在坐標平面上，其  $x$  坐標與  $y$  坐標都是整數的點稱為「格子點」。試問滿足方程式  $\log_2(x-1) = \log_4(25-y^2)$  的格子點  $(x, y)$  共有幾個？
- (1) 4 個
  - (2) 5 個
  - (3) 6 個
  - (4) 8 個
  - (5) 12 個

## 二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設二階方陣  $M$  為在坐標平面上定義的線性變換， $O$  為原點。已知  $M$  可將不共線的三點  $O$ 、 $A$ 、 $B$  映射至不共線的三點  $O$ 、 $A'$ 、 $B'$ ，試選出正確的選項。
- (1)  $M$  為可逆矩陣
  - (2) 若  $M$  將點  $C$  映射至點  $C'$  且  $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ ，則  $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OA'} + 3\overrightarrow{OB'}$
  - (3)  $\angle AOB = \angle A'OB'$
  - (4)  $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$
  - (5)  $\Delta OA'B'$  的面積 =  $\Delta OAB$  的面積  $\times |\det(M)|$

5. 下列選項中，試選出與  $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$  相乘之後會得到實數的選項。(註： $i = \sqrt{-1}$ )

(1)  $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$

(2)  $\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}$

(3)  $-\sin \frac{5\pi}{14} + i \cos \frac{5\pi}{14}$

(4)  $\sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$

(5)  $\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7}$

6. 持續投擲一枚公正骰子，在過程中若出現連續兩次點數的和為 7 時，就停止投擲。例如：若前兩次投擲分別出現點數 1、4，點數和不等於 7，所以繼續投擲；若第三次投出點數 3，因為第二次與第三次點數和為 7，所以此時即停止投擲。關於此機率事件，試選出正確的選項。

(1) 在第一次投擲的點數為 6 的情況下，總共投擲兩次就停的機率為  $\frac{1}{6}$

(2) 總共投擲兩次就停止的機率為  $\frac{1}{6}$

(3) 在第一次投擲的點數為 5 的情況下，總共投擲三次恰好停止的機率為  $\frac{1}{6}$

(4) 總共投擲三次恰好停止的機率大於  $\frac{1}{6}$

(5) 至少投擲三次才停止的機率為  $\frac{1}{2}$

7. 關於非常數的實係數多項式函數  $f(x)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若  $f(1)f(2) < 0$ ，則存在  $c \in (1, 2)$  滿足  $f(c) = 0$
- (2) 若  $f(1)f(2) > 0$ ，則對任意的  $c \in (1, 2)$ ， $f(c) \neq 0$  均成立
- (3) 若  $f(1)f(2)f(3) < 0$ ，則存在  $c \in (1, 3)$  滿足  $f(c) = 0$
- (4) 若  $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)\left(\int_0^2 f(x) dx\right) < 0$ ，則存在  $c \in (1, 2)$  滿足  $\int_0^c f(x) dx = 0$
- (5) 若  $\int_1^2 f(x) dx = 0$ ，則  $f(1)f(2) < 0$

8. 設  $a, b, c$  為三實數，且  $a > b > c$ 。已知  $2^a, 2^b, 2^c$  三數依序成等差數列。試選出正確的選項。

- (1)  $a, b, c$  三數依序成等比數列
- (2)  $2^{a+100}, 2^{b+100}, 2^{c+100}$  三數依序成等差數列
- (3)  $4^a, 4^b, 4^c$  三數依序成等差數列
- (4)  $a < b + 1$
- (5)  $b \geq \frac{a+c}{2}$

### 三、選填題 (占 18 分)

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」所標示的列號 (9-16)。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 不透明箱內有 4 顆紅球，8 顆藍球與 13 顆白球。隨機同時抽取 2 球 (每顆球被抽到的機率相等)，若抽出的兩球同色，可得獎金 450 元；若抽出的兩球異色，可得獎金 75 元。則隨機同時抽取 2 球的獎金期望值為 ⑨⑩⑪ 元。

B. 在坐標平面上，一圓心在  $y$  軸正向上的圓，與直線  $y = mx$  相切，其中  $m > 0$ 。若此圓圓心與  $x$  軸的距離和切點與  $x$  軸的距離之比值為 5，則  $m = \frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(化成最簡分數)

C. 等腰三角形  $ABC$  中，令  $\theta = \angle BAC$ 。若  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{BC} = \sin \theta$ ，則三角形  $ABC$  的面積為  $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化成最簡分數)

### 第貳部分：非選擇題 (占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

- 一. 坐標空間中，設  $E$  為過原點且由向量  $\vec{u} = (2, 0, 1)$ 、 $\vec{v} = (0, 1, 1)$  所張出的平面。將空間中兩點  $A$ 、 $B$  垂直投影到平面  $E$  上，所得投影點依序為  $A'$ 、 $B'$  兩點。已知  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 5$ 、 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 2$ ，試回答下列問題。
- (1) 若平面  $E$  方程式為  $x + by + cz = d$ ，試求實數  $b, c, d$  之值。(4 分)
  - (2) 試證明  $\overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$ 。(2 分)
  - (3) 若  $\overrightarrow{A'B'} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ ，試求實數  $\alpha, \beta$  之值。(6 分)

背面還有試題

二. 設  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  為三次實係數多項式函數。已知  $f'(x)$  是  $f(x)$  的因式，試回答下列問題。

(1) 若  $f(x) = \frac{1}{3}f'(x)(x+k)$ ，其中  $k$  為實數，試求出  $b$  (以  $k$  的數學式表示)。(4 分)

(2) 試證明  $f'(x) = 0$  有重根。(4 分)

(3) 若知  $f(-1) = 0$ ，試求積分  $\int_0^1 f(x) dx$  之值。(4 分)

# 109 學年度指定科目考試 (補考)

## 數學甲考科選擇 (填) 題答案

題號	答案	
1	4	
2	1	
3	2	
4	1,2,5	
5	2,3	
6	1,2	
7	1,4	
8	2,4,5	
A	9	2
	10	1
	11	5
B	12	1
	13	2
C	14	8
	15	2
	16	5

## 109 學年度指定科目考試(補考) 數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。

109 學年度指定科目考試(補考)數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

### 第一題

第(1)小題 (4分)

(2,0,1) 與 (0,1,1) 做外積得平面法向量為 (-1,-2,2)。

因為通過原點，所以平面  $E$  的方程式為  $x + 2y - 2z = 0$ ，

即  $b = 2$ 、 $c = -2$ 、 $d = 0$ 。

第(2)小題 (2分)

因為  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ ，又  $\overrightarrow{A'A}$  與  $\overrightarrow{u}$  垂直， $\overrightarrow{BB'}$  與  $\overrightarrow{u}$  垂直，所以

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$$

第(3)小題 (6分)

由(2)同理可得  $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v}$ ；因此

$$5 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{u} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) + \beta(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) \text{ 且 } 2 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})。$$

$$\text{又 } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 5, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 2, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1$$

$$\text{解聯立方程組 } \begin{cases} 5\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{5}{9}。$$

## 第二題

第(1)(2)小題 (各 4 分)

### 解法一

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= \frac{1}{3} f'(x)(x+k) = \frac{1}{3} (3x^2 + 2bx + c)(x+k) = x^3 + \left(\frac{2}{3}b+k\right)x^2 + \left(\frac{2}{3}bk + \frac{c}{3}\right)x + \frac{c}{3}k$$

比較  $x^2$  項係數，得  $b = \frac{2}{3}b + k \Rightarrow k = \frac{b}{3}$ ，也就是  $b = 3k$ 。

比較  $x$  項與常數項係數並將  $b = 3k$  代入得  $c = 3k^2, d = k^3$ 。

因此

$$f(x) = (x+k)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x+k)^2。$$

故  $f'(x) = 0$  有重根  $-k$ 。

### 解法二

因為  $f'(x) = \frac{1}{3}(f''(x)(x+k) + f'(x))$ ，所以  $f'(x) = \frac{1}{2}f''(x)(x+k)$ ，故  $-k$  皆為  $f(x) = 0$ 、

$f'(x) = 0$  的根，即  $-k$  為  $f(x) = 0$  的重根。

若  $\alpha \neq -k$  為  $f(x) = 0$  的另一相異實根，由  $f(\alpha) = \frac{1}{3}f'(\alpha)(\alpha+k) = 0$  知  $f'(\alpha) = 0$ ，即  $\alpha$  也是

$f(x) = 0$  的重根。此與  $f(x)$  為三次多項式相矛盾。故  $-k$  為  $f(x) = 0$  的三重根。因此

$$f(x) = (x+k)^3，$$

展開得  $b = 3k$ 。

第(3)小題 (4 分)

由  $f(-1) = 0$ ，推得  $k = 1$ ，即  $f(x) = (x+1)^3$ ，

$$\text{所以 } \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{15}{4}。$$