代號：34980
頁次：2－1

108年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：天文
科　　目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、假設$(x(t), y(t), z(t))$滿足以下線性系統：

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2x - y + z. \end{cases} \quad (1)$$

㈠請求出滿足(1)之(x, y, z)的通解。（20 分）

㈡令$(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$滿足(1)及初始值$(x_p(0), y_p(0), z_p(0)) = (x_0, y_0, z_0)$的解。試問對任何$(x_0, y_0, z_0)$，$(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$在$t \to \infty$是否都有界？如果不是，是否能給出適當$(x_0, y_0, z_0)$使得$(x_p(t), y_p(t), z_p(t))$在$t \to \infty$維持有界。（10 分）

二、利用分離變數法求解以下熱方程的初始及邊界值問題：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - au, 0 < x < h, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(h,t) = 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < h. \end{cases}$$

此時 a 為一個正數。（提示：設解$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$，利用$\phi$來處理非零邊界條件。不需要算出傅立葉級數的係數，只要寫出積分公式即可。）（25 分）

三、定義函數空間 $C_0^1((0,1)) = \{$函數$f(x)$在每點$x \in (0,1)$都可微分且微分 $f'(x)$ 在$(0,1)$是連續函數，$f(0) = f(1) = 0\}$。假設

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 [(v')^2 + v^2 - 2xe^x v]dx,$$

$v \in C_0^1((0,1))$。請在$C_0^1((0,1))$函數空間中找出使$I(v)$為最小的函數 v，需要說明為什麼這個v使$I(v)$為最小。（提示：變分法）（25 分）

四、求$y = y(x)$滿足

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y = (\ln x)/x, \\ y(1) = 0, \lim_{x\to\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

試問這樣的$y(x)$是不是唯一的？（20 分）