# 109年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　座號：______________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設 $X$ 和 $Y$ 為兩個獨立（independent）的隨機變數（random variables），且 $X$ 和 $Y$ 之平均值（mean）均為零，變異數（variance）為$\sigma^2$的高斯分布（Gaussian distribution）。隨機變數 $X$ 和 $Y$ 的聯合機率密度函數（joint pdf）為：

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty<x,y<\infty 。$$

定義兩個新的隨機變數$R$及$\Theta$如下：假設$R=\sqrt{X^2+Y^2}$及$\Theta=\tan^{-1}(Y/X)$，使得$X=R\cos\Theta$，且$Y=R\sin\Theta$。請證明隨機變數$R$的機率密度函數為

$$f_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right],\quad 0\le r<\infty$$ 。（6分）

二、㈠假設 $z$ 為一複數，求所有的 $z$ 使得$\cos z=\sqrt{2}$。（4分）

㈡假設 $z$ 為一複數，計算$\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2}dz$，其中積分路徑 $C$ 為圓$|z-2|=4$之順時針（clockwise）方向圓周（circle）。（4分）

三、㈠已知一 RC 電路系統可由微分方程式（differential equation）$\frac{d}{dt}y(t)+5y(t)=5x(t)$表示，其中 $x(t)$為輸入，且 $y(t)$為輸出。假設$x(t)=(3/5)e^{-2t}u(t)$，且初始條件（initial condition）$y(0^-)=-2$，求 $y(t)$。（8分）

㈡已知一訊號 $x(t)$的單邊拉普拉斯轉換（unilateral Laplace transform）為：

$$X(s)=e^{-2s}\frac{2s^2+1}{s(s+2)^2}$$

請求該訊號 $x(t)$的初值（initial value）及終值（final value）。（8分）

四、㈠⒜求 $k$ 使得 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\3&2&1&4\\2&6&10&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\\k\end{pmatrix}$；（7分）

⒝如⒜小題，求矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列式值（determinant）。（3分）

㈡請求以下線性系統的解 $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-2x_2+3x_3\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2+x_3\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+3x_2-x_3\end{cases}$，其中 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$及 $x_3(0)=1/2$。（10分）

乙、測驗題部分：（50分）　　代號：7343

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 對稱矩陣$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\2&0&4\end{pmatrix}$，其對角化矩陣（diagonal matrix）$\mathbf{D}=\mathbf{PAP^{-1}}$，其中$\mathbf{P}$是正交矩陣，求$\mathbf{D}=$？

(A)$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

2 矩陣$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，令$\det\mathbf{A}=6$和$\det\mathbf{B}=2$，求$\det\mathbf{AB^{-1}}=$？

(A)12 (B)6 (C)3 (D)0

3 設$\mathbf{a}$為常數向量（constant vector），$\mathbf{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$，下列何者錯誤？

(A)$\nabla\cdot\mathbf{r}=3$ (B)$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=0$

(C)$\nabla\times\mathbf{r}=0$ (D)$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=\mathbf{a}$

4 求$\int_{(1,1)}^{(2,4)}2xydx+x^2dy=$？

(A)10 (B)15 (C)20 (D)25

5 矩陣$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，求$e^{\mathbf{A}t}=$？

(A)$\begin{pmatrix}2e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}e^t&0\\0&2e^{-t}\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}2e^t&0\\0&2e^{-t}\end{pmatrix}$

6 下列矩陣何者的秩（rank）等於2。

(A)$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\\ 7 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 6 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

7 下列那一個是適合的積分因子（integrating factor），乘上它以後，將使微分方程式$(x+y)dx+xln(x)dy=0$變成正合（exact）？

(A)$x$ (B)$3$ (C)$\frac{1}{x}$ (D)$\frac{1}{x^2}$

8 微分方程式$y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$，其中$y(0)=2,\ y'(0)=6$。以拉普拉斯轉換（Laplace transform）求解後得到$Y(s)=\dfrac{2(s-c)^d+2}{(s-a)^b}$，則下列何者錯誤？

(A)$a+b+c+d=15$ (B)$a+b+c-d=7$ (C)$a-b-c+d=-1$ (D)$-a+b-c+d=-3$

9 設$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$為函數$f(x)=x^3$，$-\pi<x<\pi$之傅立葉級數（Fourier series），其中$a_0,\ a_n,\ b_n$為常數，下列何者正確？

(A)$a_0+b_n\neq 0$ (B)$a_0+a_n\neq 0$ (C)$a_0\cdot b_n\neq 0$ (D)$a_0\neq 0$

10 設$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$為微分方程$y'''+ay''+by'+cy=0$的通解（general solution），其中$a,b,c,c_1,c_2,c_3$為常數，下列何者正確？

(A)$a=-1$ (B)$b=-1$ (C)$c=-1$ (D)$a+b+c=-1$

11 求積分方程$f(t)=\cos t+\int_0^t e^{-\tau}f(t-\tau)d\tau$的解。

(A)$1-\sin t$ (B)$1+\sin t$ (C)$\cos t-\sin t$ (D)$\cos t+\sin t$

12 令連續隨機函數$X$具有機率密度函數$f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，求其變異數（variance）$\sigma^2$。（其中$k$為常數）

(A)$\frac{1}{40}$ (B)$\frac{3}{40}$ (C)$\frac{1}{80}$ (D)$\frac{3}{80}$

13 令連續二維隨機變數 $X$ 和 $Y$ 具有機率密度函數$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1 \text{ and } 0\le y\le 1 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases}$，求其機率$P(X>0.25,Y>0.5)$。（其中 $k$ 為常數）

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{9}{16}$ (C) $\frac{45}{64}$ (D) $\frac{75}{128}$

14 求複變函數積分$\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3}-\frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3}\right)dz$，其中積分路徑$C$為逆時鐘方向繞圓周$|z|=3$。

(A) $\frac{\pi}{4}i$ (B) $-\frac{\pi}{4}i$ (C) $\frac{\pi}{2}i$ (D) $-\frac{\pi}{2}i$

15 求複變函數積分$\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}dz$，其中積分路徑$C$為逆時鐘方向繞橢圓周$16x^2+y^2=4$。

(A)$2\pi i$ (B)$-2\pi i$ (C)$\pi i$ (D)$-\pi i$

16 複變函數$f(z)=z^{24}-3z^{20}+4z^{12}-5z^6$，求$f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=$？

(A)$5i$ (B)$4i$ (C)$3i$ (D)$2i$

17 $z$ 為一複數，若 $\Gamma$ 是平面中一個包含原點 $z$=0之封閉路徑，$\oint_\Gamma \frac{\cos(z)}{z}dz$=？

(A)0 (B)$-i2\pi$ (C)$2\pi$ (D)$i2\pi$

18 曲線 $C$ 為平面上一個正向簡單封閉路徑，則$\oint_C x\cos(2y)dx - x^2\sin(2y)dy=$？

(A)$4x\sin(2y)$ (B)$2x\sin(2y)$

(C)0 (D)$\frac{1}{2}\left(x^2\cos(2y)+x^2\cos(2y)\right)$

19 令一曲線 $C$ 為 $x=t^2,\ y=-t,\ z=t^2,\ 0\le t\le 1$，則$\int_C x^2dx - yzdy + e^z dz=$？

(A) $e+\frac{1}{12}$ (B) $e-\frac{1}{12}$ (C) $e-\frac{11}{12}$ (D) $e+\frac{11}{12}$

20 下表所示為 $x$ 及 $y$ 機率質量函數（probability mass function, PMF），則 $X$ 與 $Y$ 之共變異數 $COV(X,Y)$=？

| | $x_1$=1 | $x_1$=0 | $x_1$=−1 |
|---|---|---|---|
| $y_1$=1 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| $y_2$=−1 | 1/4 | 1/4 | 0 |

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C)$-1$ (D)1

測驗式試題標準答案

考試名稱：109年特種考試地方政府公務人員考試

類科名稱：電子工程、電力工程

科目名稱：工程數學（試題代號：7343）

單選題數：20題　　單選每題配分：2.50分

複選題數：　　複選每題配分：

標準答案：

| 題號 | 第1題 | 第2題 | 第3題 | 第4題 | 第5題 | 第6題 | 第7題 | 第8題 | 第9題 | 第10題 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | D | B | C | B | C | D | A | D |
| 題號 | 第11題 | 第12題 | 第13題 | 第14題 | 第15題 | 第16題 | 第17題 | 第18題 | 第19題 | 第20題 |
| 答案 | D | D | C | A | C | A | D | C | C | B |
| 題號 | 第21題 | 第22題 | 第23題 | 第24題 | 第25題 | 第26題 | 第27題 | 第28題 | 第29題 | 第30題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第31題 | 第32題 | 第33題 | 第34題 | 第35題 | 第36題 | 第37題 | 第38題 | 第39題 | 第40題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第41題 | 第42題 | 第43題 | 第44題 | 第45題 | 第46題 | 第47題 | 第48題 | 第49題 | 第50題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第51題 | 第52題 | 第53題 | 第54題 | 第55題 | 第56題 | 第57題 | 第58題 | 第59題 | 第60題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第61題 | 第62題 | 第63題 | 第64題 | 第65題 | 第66題 | 第67題 | 第68題 | 第69題 | 第70題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第71題 | 第72題 | 第73題 | 第74題 | 第75題 | 第76題 | 第77題 | 第78題 | 第79題 | 第80題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第81題 | 第82題 | 第83題 | 第84題 | 第85題 | 第86題 | 第87題 | 第88題 | 第89題 | 第90題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |
| 題號 | 第91題 | 第92題 | 第93題 | 第94題 | 第95題 | 第96題 | 第97題 | 第98題 | 第99題 | 第100題 |
| 答案 | | | | | | | | | | |

備　　註：