

財團法人大學入學考試中心基金會

111學年度學科能力測驗試題

數學A考科

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\frac{\square}{8}$ 劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{\underline{50}}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 $\frac{-}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\frac{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第1題至第6題，每題5分。

1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？

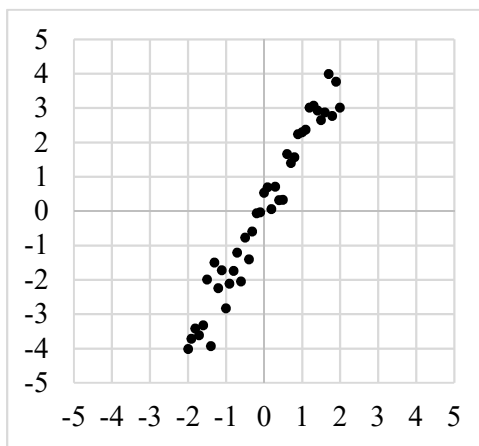
- (1) 101 (2) 105 (3) 115 (4) 120 (5) 225

2. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{a} \boxed{,} \boxed{b} \boxed{]}$ 。某生在計算 $\log_a b$ 時（其中 $a > 1$ 且 $b > 1$ ）順序弄錯，誤按 $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{b} \boxed{,} \boxed{a} \boxed{]}$ ，所得為正確值的 $\frac{9}{4}$ 倍。試選出 a, b 間的關係式。

- (1) $a^2 = b^3$ (2) $a^3 = b^2$ (3) $a^4 = b^9$ (4) $2a = 3b$ (5) $3a = 2b$

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

- (1) $y = 2x$
(2) $y = -2x$
(3) $y = -x$
(4) $y = \frac{x}{2}$
(5) $y = -\frac{x}{2}$



4. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。

- (1) $\log d$ (2) $\log \frac{2}{3}$ (3) $\log \frac{3}{2}$ (4) $\log 2d$ (5) $\log 3d$

5. 已知某地區有 30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P ；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P' 。試問 $\frac{P}{P'}$ 最接近哪一選項？

- (1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10 (5) 11

6. 設坐標平面上兩直線 L_1, L_2 的斜率皆為正，且 L_1, L_2 有一夾角的平分線斜率為 $\frac{11}{9}$ 。另一直線 L 通過點 $(2, \frac{1}{3})$ 且與 L_1, L_2 所圍的有界區域為正三角形，試問 L 的方程式為下列哪一選項？

- (1) $11x - 9y = 19$ (2) $9x + 11y = 25$ (3) $11x + 9y = 25$
(4) $27x - 33y = 43$ (5) $27x + 33y = 65$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 設整數 n 滿足 $|5n - 21| \geq 7|n|$ 。試選出正確的選項。

- (1) $|5n - 7n| \geq 21$ (2) $-1 \leq \frac{7n}{5n - 21} \leq 1$ (3) $7n \leq 5n - 21$
(4) $(5n - 21)^2 \geq 49n^2$ (5) 滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個

8. 坐標平面上， $\triangle ABC$ 三頂點的坐標分別為 $A(0,2), B(1,0), C(4,1)$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\triangle ABC$ 的三邊中， \overline{AC} 最長
(2) $\sin A < \sin C$
(3) $\triangle ABC$ 為銳角三角形
(4) $\sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
(5) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑比 2 小

9. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，且 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ，其中 a, b 為相異實數。設 Q, R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AR} = a\overrightarrow{AB} + (b - 0.05)\overrightarrow{AC}$ 。試選出正確的選項。

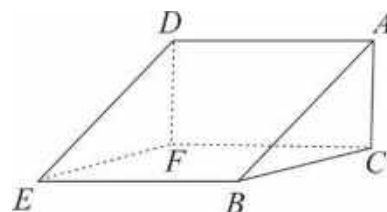
- (1) Q, R 也都在 $\triangle ABC$ 內部
- (2) $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$
- (3) $\triangle ABP$ 面積 = $\triangle ACQ$ 面積
- (4) $\triangle BCP$ 面積 = $\triangle BCQ$ 面積
- (5) $\triangle ABP$ 面積 > $\triangle ABR$ 面積

10. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 。令 $g(x) = f(-x) - 3$ ，已知 $y = g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 0)$ 且 $g(-1) < 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $g(x) = 0$ 有三相異整數根
- (2) $a < 0$
- (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1, -3)$
- (4) $f(100) < 0$
- (5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線

11. 下圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。

- (1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體
- (2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°
- (3) $\angle CEB < \angle AEB$
- (4) $\tan \angle AEC < \sin \angle CEB$
- (5) $\angle CEB < \angle AEC$



12. 設 $f(x), g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $g(x)$ ，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。試選出不可能是 $y = g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2 (5) π

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則

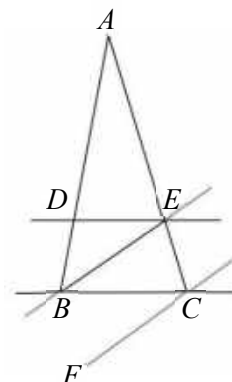
某生抽到金卡張數的期望值為 $\frac{\textcircled{13-1} \cdot \textcircled{13-2}}{\quad}$ 張。

14. 已知 a, b 為實數，且方程組
$$\begin{cases} ax + 5y + 12z = 4 \\ x + ay + \frac{8}{3}z = 7 \\ 3x + 8y + az = 1 \end{cases}$$
 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高

斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array} \right]$ 。則 $a = \frac{\textcircled{14-1}}{\quad}$ ， $b = \frac{\textcircled{14-2}}{\textcircled{14-3}}$ 。

（化為最簡分數）

15. 如圖，王家有塊三角形土地 $\triangle ABC$ ，其中 $\overline{BC} = 16$ 公尺。政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE, BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的 $\frac{9}{16}$ 。經協商，改以開闢平行直線 BE, FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC = 30^\circ$ ，則只需徵收 $\triangle BCE$ 區域。依此協商，王家剩餘的土地 $\triangle ABE$ 有 (15-1) (15-2) (15-3) 平方公尺。



16. 坐標空間中，平面 $x - y + 2z = 3$ 上有兩相異直線 $L: \frac{x}{2} - 1 = y + 1 = -2z$ 與 L' 。

已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。

則 E 的方程式為 $x + \underline{(16-1) (16-2)} y + \underline{(16-3) (16-4)} z = \underline{(16-5)}$ 。

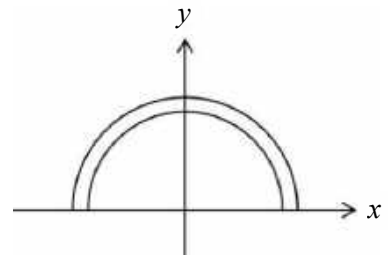
17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1, 2, 1), (-4, 1, 3), (2, 0, -3)$ ，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 (17-1) (17-2)。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2 + y^2 = 3$ 的外部與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、 $C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在 C_2 的點 B 。接著黑、白兩端各沿著 C_1 、 C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 $B'(-2, 0)$ 便停止掃描。



18. 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) $(0, 2)$ (2) $(1, \sqrt{3})$ (3) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (4) $(\sqrt{3}, 1)$ (5) $(2, 0)$

19. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B' 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R ；並於求解區內求 $\cos \angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。

（非選擇題，6 分）

20. （承 19 題）令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。

（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

$$\text{算術平均數 } \mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] - n\mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\text{迴歸直線 (最適合直線) 方程式 } y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

111 學年度學科能力測驗
數學 A 考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號	題號	答案	題號	答案
1	4	13	13-1	4	18	4
2	1		13-2	2	19	/
3	5	14	14-1	2	20	/
4	3		14-2	1		
5	2		14-3	2		
6	5	15	15-1	1		
7	2,4		15-2	9		
8	1,4		15-3	2		
9	3,4	16	16-1	—		
10	1,2		16-2	3		
11	2,3,4		16-3	—		
12	1,2		16-4	2		
			16-5	5		
		17	17-1	2		
			17-2	1		

※答案「/」者，表示該題為非選擇題。

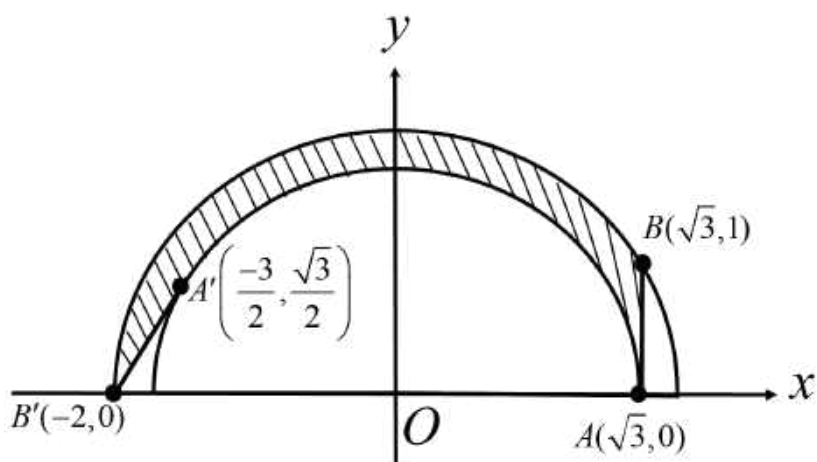
111 學年度學科能力測驗 數學 A 考科非選擇題評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程。數學科非選擇題的解法通常不只一種，且有些解法並不屬於高中課程範圍，在此提供屬於高中課程，且多數考生可能採用的解法以供各界參考。不管採取哪種解法，均需於答題卷上清楚表達推理或解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若過程中列式正確，但計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。以下提供非選擇題參考答案，以及評分原則，至於學生的作答與無法得到滿分的情形，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 330 期《選才電子報》。

第 19 題

一、滿分參考答案：

掃描棒掃過之區域圖形如下：



因為 $\overline{OB'} = 2$ ， $\overline{OA'} = \sqrt{3}$ ， $\overline{A'B'} = 1$ ，故 $\cos \angle OA'B' = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

（也可由餘弦定理，或內積求得 $\cos \angle OA'B' = 0$ ）

因為 $\angle B'OA' = \frac{\pi}{6}$ ，可知 $\angle AOA' = \frac{5\pi}{6}$ ， $\overline{OA'} = \sqrt{3}$ ，點 A' 的極坐標表示為 $[\sqrt{3}, 150^\circ]$

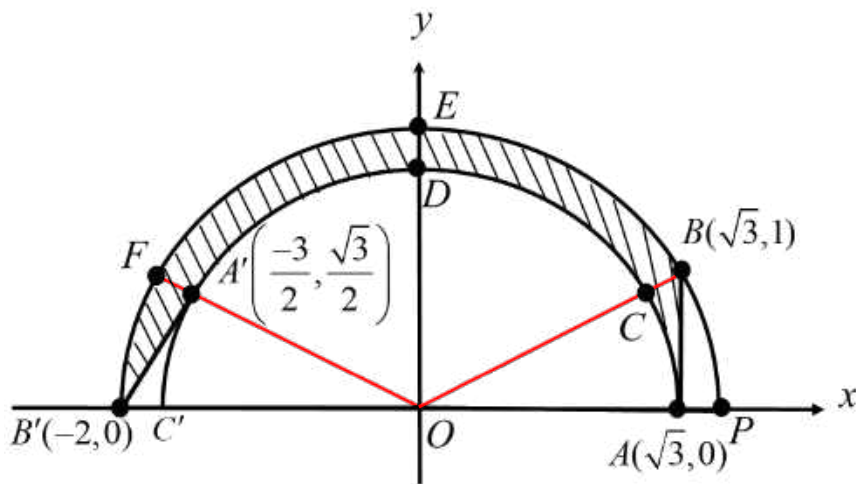
(或 $[\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}]$)。

二、評分原則：

根據題意，畫出掃描棒掃過的區域 R ，並藉由內積，或餘弦定理，或 $\angle OA'B'$ 為直角，求出 $\cos \angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。

第 20 題

一、滿分參考答案：



如上圖，

(一) Ω 的面積可由以下幾種解法求得：

【解法一】

Ω 的面積 = 扇形 OBE 的面積 + $\triangle OAB$ 的面積 - 扇形 OAD 的面積。

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \sqrt{3}^2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

【解法二】

Ω 的面積 = 第一象限的環狀帶 - (扇形 OPB 的面積 - $\triangle OAB$ 的面積)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times (2^2 - \sqrt{3}^2) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$$

(二) R 的面積可由以下幾種解法求得：

【解法一】

第二象限的斜線面積 = 第二象限的環狀帶 - ($\triangle OA'B'$ 的面積 - 扇形 $OA'C'$ 的面積)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times (2^2 - \sqrt{3}^2) - \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times \sqrt{3}^2 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R \text{ 的面積} = \Omega \text{ 的面積} + \text{第二象限的面積} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{12}$$

【解法二】

第二象限的斜線面積 = $DEFA'$ 環狀帶 + 扇形 OFB' 的面積 - $\triangle OA'B'$ 的面積

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} \times (2^2 - \sqrt{3}^2) + \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{4} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R \text{ 的面積} = \Omega \text{ 的面積} + \text{第二象限的面積} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{12}$$

【解法三】

在 $\triangle OBA$ 與 $\triangle OB'A'$ 中，因 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OB'}$ 、 $\overline{OA} = \overline{OA'}$ ，可得 $\triangle OBA \cong \triangle OB'A'$ 。

因 $\angle BOA = \angle B'OA'$ ，故扇形 OAC 的面積 = 扇形 $OA'C'$ 的面積。

所以， $\triangle OBA$ - 扇形 OAC 的面積 = $\triangle OB'A'$ - 扇形 $OA'C'$ 的面積。

故 R 的面積 = 扇形 OBB' 的面積 - 扇形 OCC' 的面積

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times \sqrt{3}^2 = \frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

二、評分原則：

能利用面積分割算出 Ω 與 R 的面積。