財團法人大學入學考試中心基金會

110 學年度指定科目考試試題

數學乙

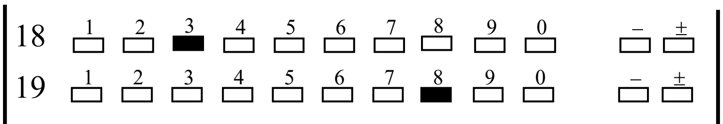
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

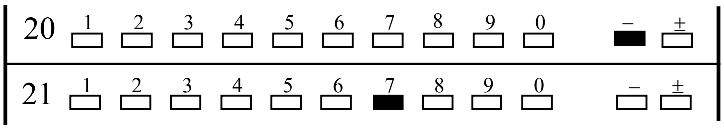
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定劃記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，恐將影響成績並損及權益。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 劃記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑳㉑}}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 劃記，如：



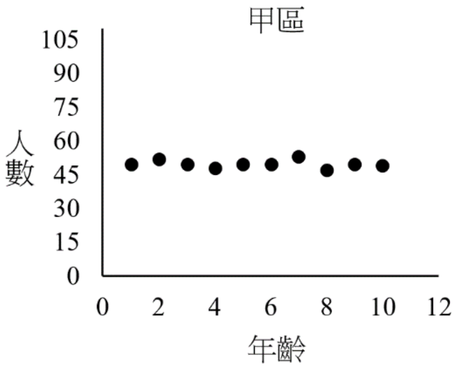
第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

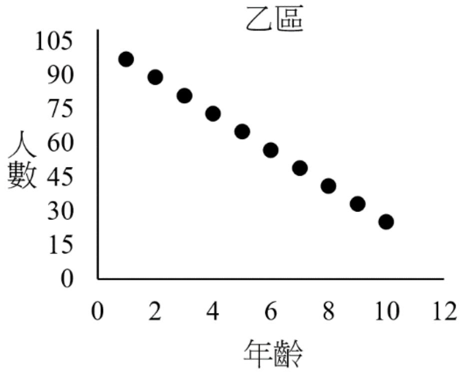
說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列選項分別為甲、乙、丙、丁、戊等五個地區 1 至 10 歲（以整數計）兒童罹患某疾病的人數散佈圖。試選出罹患某疾病的人數與年齡相關係數值最大的選項。

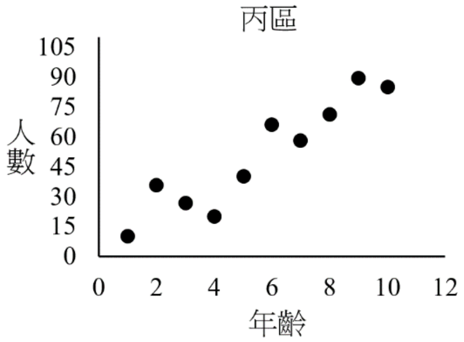
(1)



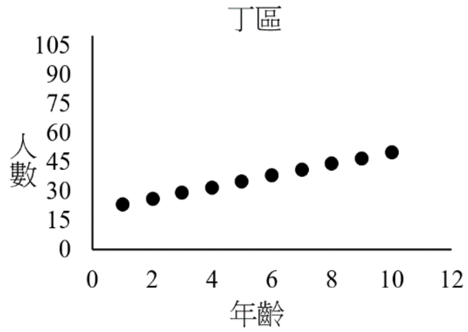
(2)



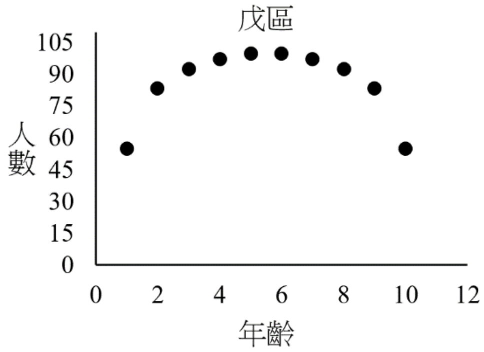
(3)



(4)



(5)



2. 已知實係數二次多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(-1)=k$，$f(1)=9k$，$f(3)=-15k$，其中 $k>0$。設函數 $y=f(x)$ 圖形頂點的 x 坐標為 a，試選出正確的選項。

(1) $a\le -1$

(2) $-1<a<1$

(3) $a=1$

(4) $1<a<3$

(5) $3\le a$

3. 某公司舉辦年終抽獎活動，每人從編號分別為 1 至 6 的六張牌中隨機抽取兩張。假設每張牌抽到的機會均相等，且規則如下：

（一）若這兩張牌的號碼之和是奇數，則可得獎金 100 元，此時抽獎結束；

（二）若號碼之和為偶數，就將這兩張牌丟掉，再從剩下的四張牌中隨機抽取兩張牌，且其號碼之和為奇數，則可得獎金 50 元，其他情形則沒有獎金，此時抽獎結束。

依上述規則，試求每人參加此抽獎活動的獎金期望值為多少元？

(1) 50

(2) 70

(3) 72

(4) 80

(5) 100

二、多選題（占 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 $a=\log_2 8$，$b=\log_3 1$，$c=\log_{0.5} 8$，試選出正確的選項。

(1) $b=0$

(2) $a+b+c>0$

(3) $a>b>c$

(4) $a^2>b^2>c^2$

(5) $2^a>3^b>(\frac{1}{2})^c$

5. 某便利商店將甲、乙、丙三個積木模型和 a、b、c、d、e 五個角色公仔，共八個玩具，分成兩袋販售。每袋均裝有四個玩具，其分裝的原則如下：

（一）甲和 a 必須裝在同一袋。

（二）每袋至少裝有一個積木模型。

（三）d 和 e 必須裝在不同袋。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1) 每袋至少裝有兩個角色公仔

(2) 乙和丙必裝在不同袋

(3) 如果乙和 d 裝在同一袋，則丙和 e 必裝在同一袋

(4) 如果乙和 d 裝在不同袋，則 b 和 c 必裝在不同袋

(5) 如果 b 和 c 裝在不同袋，則乙和丙必裝在同一袋

6. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$， $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n-1} a_n$ ， n 為正整數。試選出正確的選項。

(1) $a_2 = 3$

(2) $a_4 = 9$

(3) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列

(4) $\sum_{n=1}^{20} a_n = 400$

(5) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{n} = 2$

7. 已知某人每次飛鏢射中的機率皆為 $\dfrac{1}{2}$，且每次射飛鏢的結果均互相獨立。試從下列選項中，選出發生機率為 $\dfrac{1}{2}$ 的事件。

(1) 連續射 2 次飛鏢，恰射中 1 次

(2) 連續射 4 次飛鏢，恰射中 2 次

(3) 連續射 4 次飛鏢，射中的總次數為奇數

(4) 連續射 6 次飛鏢，在第 1 次沒有射中的條件下，第 2 次有射中

(5) 連續射 6 次飛鏢，在前 2 次恰射中 1 次的條件下，後 4 次恰射中 2 次

三、選填題（占 24 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8–13）。
　　　2.每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 數線上有原點 O 及三點 $A(-2)$、$B(10)$、$C(x)$，其中 x 為實數。
已知線段 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{OB}$ 長度大小關係為 $\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{OB}$，
則 x 的最大範圍為 ⑧ $<x<$ ⑨ 。

B. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，其中 $\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$ 為矩陣 $\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的反方陣。若 $A+B=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$ ⑩⑪ 。

C. 已知一個不均勻銅板，投擲時出現正面的機率為 $\frac{1}{3}$，出現反面的機率為 $\frac{2}{3}$。今在坐標平面上有一顆棋子，依投擲此銅板的正反面結果，前進至下一個位置，規則如下：

（一）若擲出為正面，則從目前位置依著向量 $(-1,2)$ 的方向與長度，前進至下一個位置；

（二）若擲出為反面，則從目前位置依著向量 $(1,0)$ 的方向與長度，前進至下一個位置。

例如：棋子目前位置在坐標 $(2,4)$，若擲出反面，則棋子前進至坐標 $(3,4)$。

假設棋子以原點 $(0,0)$ 為起始點，依上述規則，連續投擲此銅板 6 次，且每次投擲均互相獨立，則經過 6 次移動後，棋子停在坐標(⑫ , ⑬)的機率最大。

— — —以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 — — —

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，該部分不予計分。每一子題配分標於題末。

一、坐標平面上有兩點 $A(-3,4)$，$B(3,2)$ 及一條直線 L。已知 A、B 兩點在直線 L 的兩側且 $\overrightarrow{n}=(4,-3)$ 是直線 L 的法向量。設 A 點到直線 L 的距離為 B 點到直線 L 的距離的 5 倍。根據上述，試回答下列問題。

(1) 試求向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{n}$ 的內積。（4 分）

(2) 試求直線 L 的方程式。（4 分）

(3) 設 P 點在直線 L 上且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，試求 P 點坐標。（4 分）

二、已知某廠商生產甲、乙兩型電動車所需的成本有電池、馬達、其他等三大類，甲、乙兩型的各類成本如下表（單位：萬元）：

	電池成本	馬達成本	其他成本
甲型	56	26	48
乙型	40	20	56

今該廠商甲、乙兩型電動車售價的算式為「電池成本的 x 倍」、「馬達成本的 y 倍」與「其他成本的 $\frac{x+y}{2}$ 倍」之總和，即

$$售價 = 電池成本 \times x + 馬達成本 \times y + 其他成本 \times \frac{x+y}{2}$$

其中倍數 x、y 需滿足「$1 \le x \le 2$，$1 \le y \le 2$，且甲、乙兩型電動車的售價均不超過 200 萬元」。

該廠商為了區隔產品，希望甲、乙兩型電動車的售價差距最大。根據上述資訊，試回答下列問題。

(1) 試寫出甲、乙兩型電動車的售價（以 x、y 的式子來表示），並說明「甲型電動車的售價必定高於乙型電動車的售價」。（4 分）

(2) 試在坐標平面上，畫出滿足題幹條件 (x,y) 的可行解區域，並以斜線標示該區域。（4 分）

(3) 試求當倍數 x、y 分別為多少時，甲、乙兩型電動車的售價差距最大？此時甲、乙兩型電動車的售價差距為多少萬元？（6 分）

110 學年度指定科目考試
數學乙考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		4
2		2
3		2
4		1,3
5		1,5
6		1,4,5
7		1,3,4
A	8	4
	9	8
B	10	1
	11	4
C	12	2
	13	4

110 學年度指定科目考試
數學乙考科非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的《選才電子報》。

110 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題

因為 A, B 兩點的坐標分別為 $(-3,4)$ 和 $(3,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(6,-2)$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=(6,-2)\cdot(4,-3)=6\times4+(-2)\times(-3)=30$

第(2)小題

解法一：距離公式

直線 L 的法向量為 $(4,-3)$，令直線 L 的方程式為 $4x-3y+k=0$。

因為 A 點到 L 的距離為 B 點到 L 的距離的 5 倍，我們有

$$\frac{|4\times(-3)-3\times4+k|}{5}=5\times\frac{|4\times3-3\times2+k|}{5}，$$

因為 A, B 兩點在 L 的兩側，去掉絕對值後（$k-24$ 和 $6+k$ 異號），我們會有

$-(k-24)=5(6+k)$。

可解出 $k=-1$，即直線 L 的方程式為 $4x-3y-1=0$。

解法二：分點公式求點 C

令直線 L 和 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於一點 C。

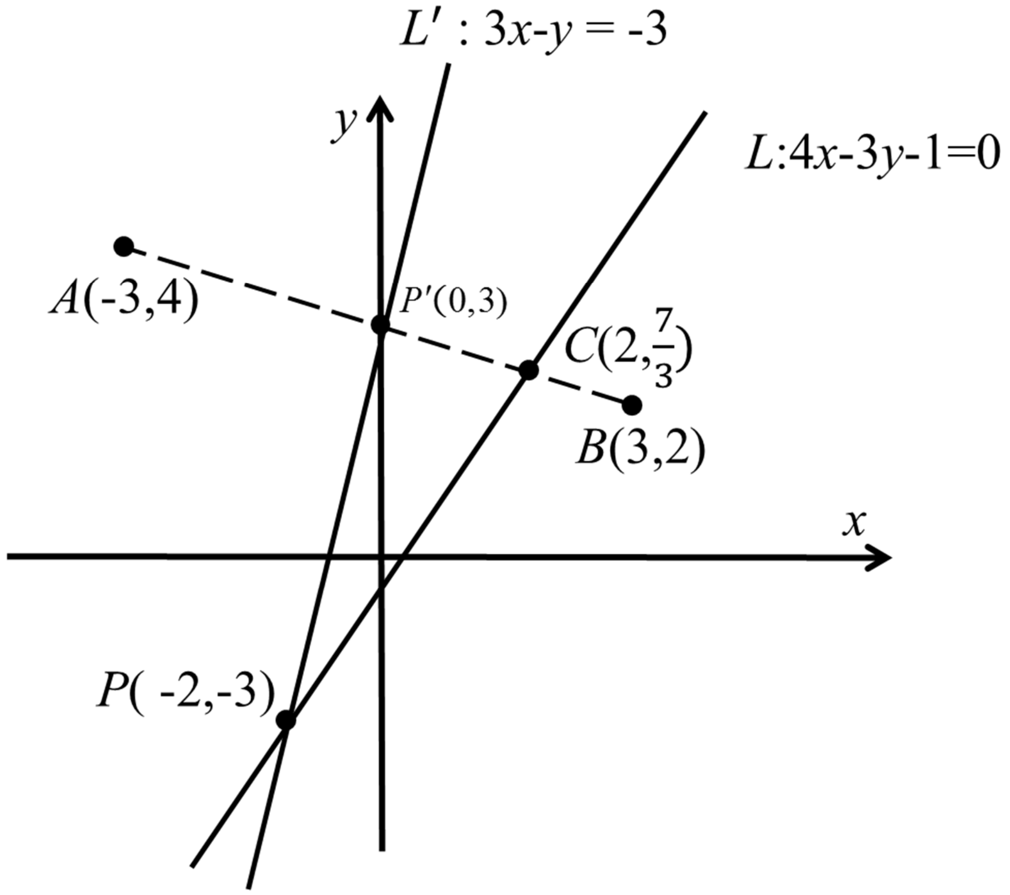
因為 A 點到 L 的距離為 B 點到 L 的距離的 5 倍，由比例性質，我們有 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:1$

因為 A,B 兩點在 L 的兩側，C 點會落在 $\overline{AB}$ 上。由分點公式，C 點的坐標為

$$\frac{1}{6}(-3,4)+\frac{5}{6}(3,2)=(2,\frac{7}{3})$$

因為直線 L 的法向量為 $(4,-3)$ ，其斜率為 $\frac{4}{3}$ ，而 $C(2,\frac{7}{3})$ 為 L 上一點，

可得 L 的方程式為 $y-\frac{7}{3}=\frac{4}{3}(x-2)$ ，即 $4x-3y-1=0$



第(3)小題

解法一：參數式

由(2)，直線 L 的方程式為 $4x-3y=1$，可知 L 的參數式為 $L:\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 。

令 P 點的坐標為 $(1+3t,1+4t)$ ，因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，我們有

$$\sqrt{\left[(1+3t)-(-3)\right]^2+\left[(1+4t)-4\right]^2}=\sqrt{\left[(1+3t)-3\right]^2+\left[(1+4t)-2\right]^2} ,$$

可解出 $t=-1$。故 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

註：直線 L 的參數式有很多種不同的型式，如： $L:\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{4t-1}{3} \end{cases}$ ；$L:\begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{4} \\ y=t \end{cases}$ 。

解法二：兩點距離

令 P 點的坐標為 (x,y) 。因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，我們有

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

即 $3x-y=-3$ 。又因為 P 在 L 上，我們有 $4x-3y=1$ 。

解聯立，得 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

解法三：中垂線

因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，P 點落在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

因為 A,B 兩點的坐標分別為 $(-3,4)$ 和 $(3,2)$ ， A,B 中點 D 的坐標為 $(0,3)$ ，且 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的法向量為 $(3,-1)$ 。故 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的方程式為 $L':3x-y=-3$ 。由此， L 和 L' 的交點 P 坐標為 $(-2,-3)$ 。

解法四：中垂線以參數式表示

$\overline{AB}$ 中點 $P'=(0,3)$ ，得中垂線 $L':\begin{cases} x=t \\ y=3+3t \end{cases}$ 。令 P 點坐標為 $(t,3+3t)$ 代入直線 $L:4x-3y=1$ 中，可得 $t=-2$ ，解得 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

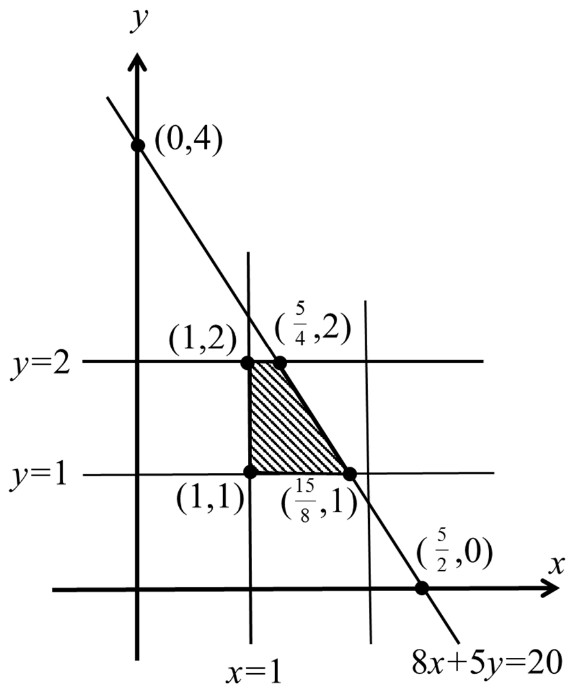
第二題

第(1)小題

甲型車和乙型車的售價分別為 $56x+26y+48\times(\frac{x+y}{2})$、$40x+20y+56\times(\frac{x+y}{2})$，經化簡可得 $80x+50y$ 與 $68x+48y$。因為 $x,y>0$，甲車售價 $=80x+50y>68x+48y=$ 乙車售價（或甲－乙＝$12x+2y>0$）。

第(2)小題

指出可行解區域是由 $\begin{cases} x\geq 1 \\ 1\leq y\leq 2 \\ 8x+5y\leq 20 \end{cases}$ 所繪出的梯形區域，如下圖。



第(3)小題

解法一：頂點法

甲乙兩型車的售價差所對應的目標函數為$P(x,y)=12x+2y$， 我們要在限制條件下，求$P(x,y)$的最大值。將四個頂點$(1,1),(1,2),(\frac{15}{8},1),(\frac{5}{4},2)$分別代入目標函數得下表。

(x,y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(\frac{15}{8},1)$	$(\frac{5}{4},2)$
$P(x,y)=12x+2y$	14	16	$\frac{49}{2}$	19

最大值發生在$(\frac{15}{8},1)$這個點。故當$x=\frac{15}{8},y=1$時，甲乙兩型車的售價差距最大。

此時，兩型車的售價差距為24.5萬元。

解法二：平行線法

甲乙兩型車的售價差所對應的目標函數為$P(x,y)=12x+2y$

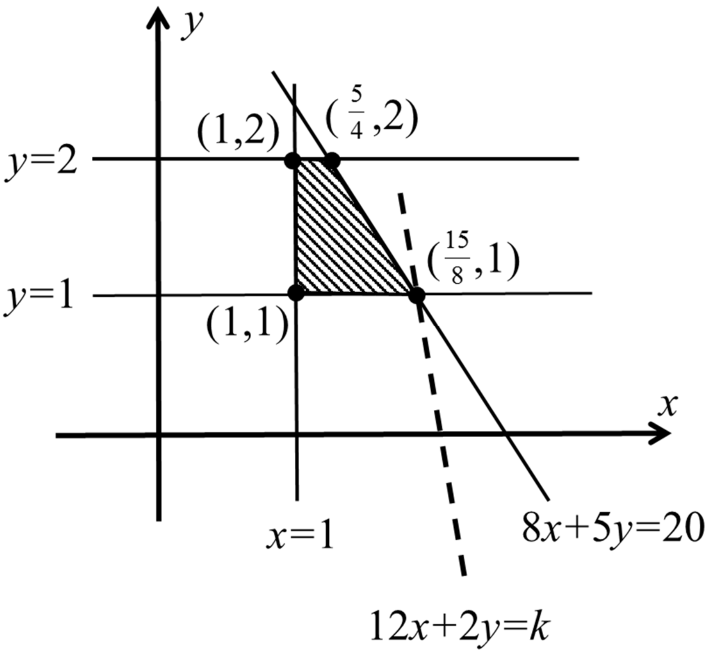
我們要在限制條件下，求$P(x,y)$的最大值。

求出正確的$(\frac{15}{8},1)$，並以下列理由之一說明。

(1) $8x+5y=20$這條直線的斜率為$-\frac{8}{5}$，而$12x+2y=k$這些平行直線的斜率為-6。

因為$-6<-\frac{8}{5}$，當$12x+2y=k$這些平行直線於可行解區域平行移動時，最後通過可行解區域的點為$(\frac{15}{8},1)$。

(2) 畫出一條過$(\frac{15}{8},1)$且與直線$12x+2y=k$平行的直線，如下圖。



最大值發生在$(\frac{15}{8},1)$這個點。故當$x=\frac{15}{8}, y=1$時，甲乙兩型車的售價差距最大。

此時，兩型車的售價差距為24.5萬元。