

103年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：30960 全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、在 \mathbb{R}^3 空間，找一正交基底 (orthogonal basis) 含向量 $v = [1, 2, 3]^T$ 。(20分)

二、設線性方程組

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

利用此方程組的增廣矩陣 (augmented matrix)，以 elementary row operations，

(一)求此線性方程組的一般解。(15分)

(二)此解集合最多有幾個線性獨立解？(5分)

三、設向量空間 P_n 為次方小於或等於 n 之實多項式。另設函數 $T: P_2 \rightarrow P_3$ 定為 $T(p(x)) = (x+1)p(x-1)$ 。

(一)證明 T 為線性映射 (linear transformation)。(5分)

(二)若 P_2, P_3 的有序基底 (ordered basis) 分別為 $\{1, x, x^2\}, \{1, x, x^2, x^3\}$ ，求線性映射 T 對此有序基底的矩陣表示 (matrix representation)。(10分)

(三)若 $q(x) = 3x^2 - 5x + 8$ ，利用(二)，求 $T(q(x)) = ?$ (5分)

四、設 A, B 為 n 階方陣， $\sigma(H)$ 表方陣 H 的所有固有值 (eigenvalue) 的集合。證明 $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ 。(20分)

五、設二次方程式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ 為兩直線。證明

$$\det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0,$$

此處 \det 表矩陣之 determinant。(20分)

(提示：將此二次式表示成兩個一次式的乘積，計算此矩陣的 8 倍 \det)