

財團法人大學入學考試中心基金會

111學年度分科測驗試題

數學甲考科

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 \square^3 與第 18-2 列的 \square^8 劃記，如：

18-1	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm
18-2	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 \square^- 與第 19-2 列的 \square^7 劃記，如：

19-1	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm
19-2	\square^1	\square^2	\square^3	\square^4	\square^5	\square^6	\square^7	\square^8	\square^9	\square^0	\square^-	\square^\pm

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 設 a_1, a_2, a_3, a_4 是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令 $b = \sum_{n=1}^3 \log_{a_n} a_{n+1}$ ，試選出正確的選項。

- (1) $2 < b \leq 3$ (2) $3 < b \leq 4$ (3) $4 < b \leq 5$ (4) $5 < b \leq 6$ (5) $6 < b \leq 7$

2. 設 c 為實數使得三元一次方程組
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + cy + 3z = 1 \\ 3x - 3y + cz = 0 \end{cases}$$
 無解。試選出 c 之值。

- (1) -3 (2) -2 (3) 0 (4) 2 (5) 3

3. 坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且 $\overline{OP}=1$ 。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為 45° ，且 P 點到 y 軸的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。試選出點 P 的 z 坐標。

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設多項式 $f(x)=x^3+2x^2-2x+k$ 、 $g(x)=x^2+ax+1$ ，其中 k,a 為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$ ，且方程式 $g(x)=0$ 有虛根。試選出為方程式 $f(x)=0$ 的根之選項。

- (1) -3 (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ (5) $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

5. 坐標平面上有一圖形 Γ ，其方程式為 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ 。試選出正確的選項。

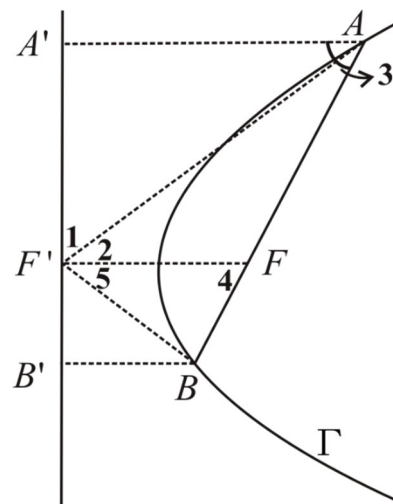
- (1) Γ 與 x 軸負向、 y 軸負向分別交於 $(-9,0)$ 、 $(0,-9)$
- (2) Γ 上 x 坐標最大的點是點 $(11,0)$
- (3) Γ 上的點與原點距離的最大值為 $\sqrt{2} + \sqrt{101}$
- (4) Γ 在第三象限的點之極坐標可用 $[9, \theta]$ 表示，其中 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- (5) Γ 經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

6. 假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$ 、 $A'(3, \sqrt{3})$ 、 $B'(-\sqrt{3}, 3)$ ，並將與原點距離為 1 的點 $C(x,y)$ 映射到點 $C'(x',y')$ 。試選出正確的選項。

- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$
- (2) $\overline{OC'} = 2\sqrt{3}$
- (3) \overrightarrow{OC} 和 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 60°
- (4) 有可能 $y = y'$
- (5) 若 $x < y$ 則 $x' < y'$

7. 假設 A, B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F 。設 A, F, B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A', F', B' 。試選出等於 $\frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$ 的選項。(注意：此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係並不正確)

- (1) $\tan \angle 1$ ，其中 $\angle 1 = \angle A'F'A$
 (2) $\sin \angle 2$ ，其中 $\angle 2 = \angle AF'F$
 (3) $\sin \angle 3$ ，其中 $\angle 3 = \angle A'AF$
 (4) $\cos \angle 4$ ，其中 $\angle 4 = \angle F'FB$
 (5) $\tan \angle 5$ ，其中 $\angle 5 = \angle FF'B$



8. 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。

- (1) $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$ (2) $b_n > \frac{4n-1}{2n}$ (3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 有可能發散
 (4) $a_{10000} < 6.1$ (5) $a_{10000} > 5.9$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。

我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則

$$E(X) = \frac{(9-1)(9-2)}{1} \text{。 (四捨五入到整數位)}$$

10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這 4 天，發完國、英、數、社、自共 5 張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依此要求，學藝共有 $\frac{(10-1)(10-2)}{1}$ 種安排方式。

11. 在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left|\frac{-3+4i}{5}-z^3\right|=\left|\frac{-3+4i}{5}-z\right|$ ，其中

$$i=\sqrt{-1}。若 z 的實部為 a 、虛部為 b ，則 $a=\frac{\sqrt{\textcircled{11-1}}}{\textcircled{11-2}}$ 、 $b=\frac{\textcircled{11-3}\sqrt{\textcircled{11-4}}}{\textcircled{11-5}}$ 。$$

(化為最簡根式)

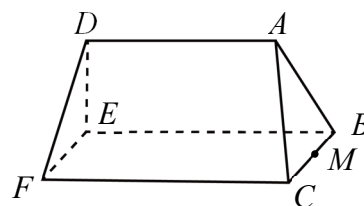
背面還有試題

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

有一積木（如圖），其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形， $BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P 。已知 $\overline{AD}=30$ 、 $\overline{CF}=40$ 、 $\overline{AP}=15$ 且 $\overline{BC}=10$ 。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。



試回答下列問題。

12. 利用 \overline{AD} 在平面 $BCFE$ 的投影長為 30，可得 $\tan \angle AMP = \underline{\textcircled{12}}$ 。（選填題，2 分）

13. 令 Q 為 \overline{FC} 上一點，滿足 \overrightarrow{AQ} 與 \overrightarrow{DF} 平行。利用 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACQ$ 為全等三角形，證明若水平面 W 介於 A, P 之間且與 A 的距離為 x ，則 W 與此積木所截的矩形區域之面積為 $20x + \frac{4}{9}x^2$ 。（非選擇題，4 分）

14. 將線段 \overline{AP} 的 n 等分點沿著向量 \overrightarrow{AP} 的方向依序設為 $A=P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n=P$ 。在每一個分段 $\overline{P_{k-1}P_k}$ ，考慮以通過 P_k 的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$ 為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和（不需化簡），且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。（非選擇題，6 分）

背面還有試題

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量 \vec{a} 、 \vec{b} 滿足 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9$ 以及 $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ 。若令 $|\vec{a}| = x$ ，其中 $1 < x < 8$ ，且令 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，則利用向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos\theta$ 以 x 表示成 $\frac{c}{9x-x^2} + d$ ，其中 c 、 d 為常數且 $c > 0$ 。令此表示式為 $f(x)$ ，且其定義域為 $\{x \mid 1 < x < 8\}$ 。試回答下列問題。

15. 求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題，4 分)

16. 說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角 θ 最大。
(非選擇題，4 分)

17. 利用 $f(x)$ 的一次估計（一次近似），求當 $x=4.96$ 時， $\cos\theta$ 約為多少？
（非選擇題，4分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

111 學年度分科測驗
數學甲考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號	答案	題號	答案	
1	3	9	9-1	1	12	3
2	2		9-2	4	13	/
3	4	10	10-1	4	14	/
4	1,4		10-2	2	15	/
5	1,3,5	11	11-1	5	16	/
6	2,4		11-2	5	17	/
7	3,5		11-3	2		
8	2,5		11-4	5		
			11-5	5		

※ 答案「/」者，表示該題為非選擇題。

111 學年度分科測驗 數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。111 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 13、14、15、16、17 題。其中第 13、15、16、17 題每題為 4 分；第 14 題為 6 分，總計 22 分。

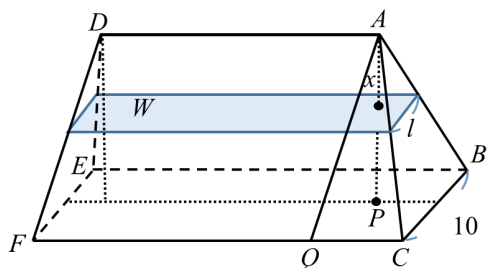
非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的第 332 期《選才電子報》。

111 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 13 題

一、滿分參考答案：



W 與 $\triangle ABC, \triangle ACQ$ 所截邊長相等，設此邊長為 l ，由相似形可得 $\frac{l}{10} = \frac{x}{15}$ ，所以 $l = \frac{2x}{3}$ 。

所截矩形另一邊長為 $30 + l = 30 + \frac{2x}{3}$ ，所以矩形面積為 $\frac{2x}{3}(30 + \frac{2x}{3}) = 20x + \frac{4}{9}x^2$ 。

二、評分原則：

能否依據題意所給條件，以相似形求得矩形邊長，並證得矩形面積。

第 14 題

一、滿分參考答案：

1. 由 $\overline{P_0P_k} = \frac{15k}{n}$ ，與過 P_k 的水平面所截矩形面積為 $20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2$ ，再乘上高

$\frac{15}{n}$ ，得黎曼和 $\sum_{k=1}^n \left[20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2 \right] \frac{15}{n}$ 。

2. 體積的定積分式為 $\int_0^{15} \left(20x + \frac{4}{9}x^2 \right) dx$ 。

利用反導函數得積分值為 $\left(10x^2 + \frac{4}{27}x^3 \right) \Big|_0^{15} = 10 \times 15^2 + \frac{4}{27} \times 15^3 = 2750$ 。

二、評分原則：

能否由切片方法寫下估計積木體積的黎曼和，並能利用定積分表示積木體積，進而求得積木體積值。

第 15 題

一、滿分參考答案：

\vec{a} 、 \vec{b} 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 所形成的三角形邊長分別為 x 、 $9-x$ 、 7 。

由餘弦定理得 $\cos \theta = f(x) = \frac{x^2 + (9-x)^2 - 7^2}{2x(9-x)} = \frac{x^2 - 9x + 16}{x(9-x)} = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，

微分得 $f'(x) = \frac{-16(9-2x)}{(9x-x^2)^2}$ 。

二、評分原則：

能否正確操作餘弦定理並得出 $f(x)$ ，並以微分除法律求其導函數。

第 16 題

一、滿分參考答案：

法一：微分

由上題的 $f'(x)$ 可得：

當 $1 < x < \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) < 0$ ，故此時 $f(x)$ 為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$ 時 $f'(x) > 0$ ，此時 $f(x)$ 為遞

增。

當 $x = \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) = 0$ ， $f(x) = \cos \theta$ 有最小值，此時夾角 θ 為最大。

法二：配方法

由上題的 $f(x) = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，其中 $\frac{16}{9x-x^2}$ 的分子為常數，將分母配方得

$$9x - x^2 = -(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{81}{4},$$

當 $1 < x < \frac{9}{2}$ 時，分母遞增，此時 $f(x)$ 為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$ 時，分母遞減，此時 $f(x)$ 為遞增。

當 $x = \frac{9}{2}$ 時，分母有最大值， $f(x) = \cos \theta$ 有最小值。此時夾角 θ 為最大。

二、評分原則：

以一階微分 $f'(x)$ 的正負來說明 $f(x)$ 在哪個區域遞增、遞減，以說明 x 為多少時，夾角 θ 為最大。

第 17 題

一、滿分參考答案：

因為 5 在 4.96 附近且易於計算，所以是最合適的估計參考點。在 5 附近的一次估計為 $f(x) \approx f(5) + f'(5)(x-5)$ ，

由 $f(5) = -0.2$ 與 $f'(5) = 0.04$ ，可得 $f(4.96) \approx -0.2 + 0.04 \times (-0.04) = -0.2016$ 。

二、評分原則：

會寫出一次估計形式，並找到合理的估計參考點說明當 $x = 4.96$ 時， $\cos \theta$ 約為多少？