大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試試題
數學甲

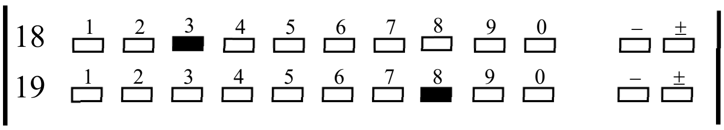
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

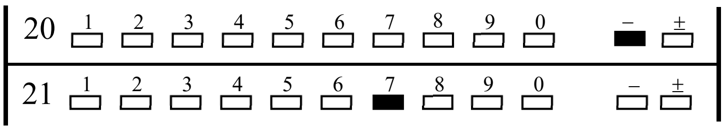
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是$\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是$\dfrac{-7}{50}$時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 $45°<\theta<50°$，且設 $a=1-\cos^2\theta$、$b=\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$、$c=\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$。關於 a,b,c 三個數值的大小，試選出正確的選項。

(1) $a<b<c$

(2) $a<c<b$

(3) $b<a<c$

(4) $b<c<a$

(5) $c<a<b$

2. 有 A,B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球，B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：

(一)先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；

(二)先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；

(三)同時分別在 A,B 箱中各抽取一球。

給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1、E_2、E_3，試選出正確的選項。

(1) $E_1>E_2>E_3$

(2) $E_1=E_2>E_3$

(3) $E_2=E_3>E_1$

(4) $E_1=E_3>E_2$

(5) $E_3>E_2>E_1$

3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每3.5小時會擴增為2.4倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌 1000 隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達 4×10^{10} 隻左右？（註： $\log 2\approx 0.3010$ ， $\log 3\approx 0.4771$ ）

(1) 63小時

(2) 70小時

(3) 77小時

(4) 84小時

(5) 91小時

二、多選題（占 **40** 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A、B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1,C_2,C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n}=\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$， $n=1,2,3$，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{OC_1}\neq\overrightarrow{0}$

(2) $\overline{OC_1}<\overline{OC_2}<\overline{OC_3}$

(3) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$

(4) $\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$

(5) C_1,C_2,C_3 在同一直線上

5. 對一實數 a，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如：$[1.2]=[\sqrt{2}]=1$，$[-1.2]=-2$。

考慮無理數 $\theta=\sqrt{10001}$，試選出正確的選項。

(1) $a-1<[a]\le a$ 對任意實數 a 均成立

(2) 數列 $b_n=\dfrac{[n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(3) 數列 $c_n=\dfrac{[-n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數

(4) 數列 $d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

(5) 數列 $e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

6. 設 $F(x)$、$f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x)=f(x)$，試選出正確的選項。

(1) 若 $a\ge 0$，則 $F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)\,dt$

(2) 若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$，則 $Q(0)=f(0)$

(3) 若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x)-F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除

(4) 若對所有實數 x，$F(x)\ge\dfrac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x，$f(x)\ge x$ 也都成立

(5) 若對所有 $x>0$，$f(x)\ge x$ 都成立，則對所有 $x>0$，$F(x)\ge\dfrac{x^2}{2}$ 也都成立

7. 在複數平面上，設 O 為原點，且 A、B 分別表示坐標為複數 z、$z+1$ 的點。已知點 A、點 B 都在以 O 為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。

(1) 直線 AB 與實數軸平行

(2) ΔOAB 為直角三角形

(3) 點 A 在第二象限

(4) $z^3=1$

(5) 坐標為 $1+\dfrac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上

8. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足 $B^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) A 恰有三種可能

(2) B 恰有三種可能

(3) $AB=BA$

(4) 二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換

(5) $BABA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–19)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$、$x-3y+2z=0$、$x+y=t$ 的交點，其中 $t>0$。若 $\overline{OP}=10$，則 $t=$ ⑨$\sqrt{⑩⑪}$。（化成最簡根式）

B. 考慮坐標平面上相異三點 A、B、C，其中點 A 為 $(1,1)$。分別以線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4,2)$。已知 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為 (⑫ , ⑬⑭)。

C. 有一個三角形公園，其三頂點為 O、A、B，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A、B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C，測得其俯角分別為 30°、60°、45°。則此三角形公園的面積為 ⑮⑯⑰⑱$\sqrt{⑲}$ 平方公尺。（化成最簡根式）

— — —以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 坐標平面上，由 A、B、C、D 四點所決定的「貝茲曲線」（Bézier curve）指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A,D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B，在點 D 的切線通過點 C。令 $y=f(x)$ 是由 $A(0,0)$、$B(1,4)$、$C(3,2)$、$D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

(1) 設 $y=f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y=ax+b$，其中 a,b 為實數。求 a,b 之值。（2 分）

(2) 試證明多項式 $f(x)$ 可以被 x^2-4x 所整除。（2 分）

(3) 試求 $f(x)$。（4 分）

(4) 求定積分 $\int_2^6 |8f(x)|\,dx$ 之值。（4 分）

背 面 還 有 試 題

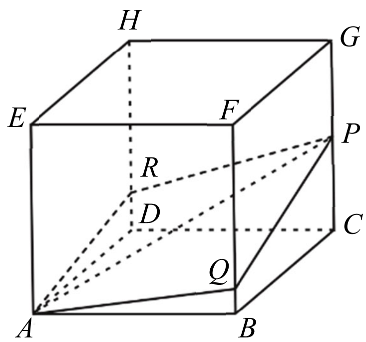
二. 一個邊長為1的正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$，點 P 為稜邊 $\overline{CG}$ 的中點，點 Q、R 分別在稜邊 $\overline{BF}$、$\overline{DH}$ 上，且 A,Q,P,R 為一平行四邊形的四個頂點，如下圖所示。
今設定坐標系，使得 D、A、C、H 的坐標分別為 $(0,0,0)$、$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$，且 $\overline{BQ}=t$，試回答下列問題。

(1) 試求點 P 的坐標。（2 分）

(2) 試求向量 $\overrightarrow{AR}$（以 t 的式子來表示）。（2 分）

(3) 試證明四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積是一個定值（與 t 無關），並求此定值。（4 分）

(4) 當 $t=\dfrac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。（4 分）



109 學年度指定科目考試
數學甲考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		5
2		3
3		2
4		4,5
5		1,5
6		1,2
7		1,4,5
8		2,5
A	9	4
	10	1
	11	0
B	12	7
	13	—
	14	7
C	15	7
	16	5
	17	0
	18	0
	19	2

109 學年度指定科目考試
數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

109 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題（2 分）

直線 CD 的斜率為 $m=\dfrac{0-2}{4-3}=-2$，該直線方程式為 $y-0=-2(x-4)$，

即 $y=-2x+8$，所以 $a=-2$，$b=8$。

第(2)小題（2 分）

由除法原理，可設 $f(x)=(x^2-4x)Q(x)+rx+s$，且因圖形通過 $A(0,0)$ 及 $D(4,0)$ 知 $f(0)=f(4)=0$，代入得 $r=0$、$s=0$，所以 $f(x)$ 可被 $x(x-4)=x^2-4x$ 整除。

第(3)小題（4 分）

由直線 AB 斜率為 4，直線 CD 斜率為 -2，推得 $f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，

以下提供兩個解法算出 $f(x)$。

解法一

由第(2)小題，設 $f(x)=(cx+d)(x^2-4x)$，得 $f'(x)=c(x^2-4x)+(cx+d)(2x-4)$

代入 $f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，解聯立方程組得 $f(x)=x(x-4)(\dfrac{1}{8}x-1)$。

解法二

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

代入 $f(0)=0$，$f(4)=0$，$f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，

解聯立方程組得 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x$。

第(4)小題（4 分）

解法一

由第(3)小題可得 $8f(x)=x(x-4)(x-8)=x^3-12x^2+32x$，
當 $2\le x\le 4$ 時，$8f(x)\ge 0$；當 $4\le x\le 6$ 時，$8f(x)\le 0$。

所以 $\int_2^6 |8f(x)|\,dx=\int_2^4 8f(x)\,dx-\int_4^6 8f(x)\,dx$。

$8f(x)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2$，所以積分為

$$\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_2^4-\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_4^6=28+28=56$$

解法二

$8f(x)=x(x-4)(x-8)=x^3-12x^2+32x$，因 $f(x)=0$ 的根為 $x=0$、4、8，
由對稱性得 $(4,0)$ 為 $y=f(x)$ 的反曲點。

又當 $2\le x\le 4$ 時，$8f(x)\ge 0$，所以由對稱性得 $\int_2^6 |8f(x)|\,dx=2\int_2^4 8f(x)\,dx$，

$8f(x)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2$，所以積分為 $2\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_2^4=56$

第二題

第(1)小題（2 分）

P 點坐標為 $\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)=(0,1,\frac{1}{2})$。

第(2)小題（2 分）

Q 點坐標為 $(1,1,t)$，又 $AQPR$ 為一平行四邊形，

所以 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QP}=(0,1,\frac{1}{2})-(1,1,t)=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$

第(3)小題（4 分）

解法一

四角錐 G-$AQPR$ 可視為以 G 為頂點，平行四邊形 $AQPR$ 為底的四角錐，

故此四角錐體積為 $\frac{1}{3}\cdot|(\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{PG}|$

因 $(\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ})=(-1,0,\frac{1}{2}-t)\times(0,1,t)=(t-\frac{1}{2},t,-1)$，又 $\overrightarrow{PG}=(0,0,\frac{1}{2})$

得四角錐 G-$AQPR$ 體積為 $\frac{1}{3}\times|(t-\frac{1}{2},t,-1)\cdot(0,0,\frac{1}{2})|=\frac{1}{6}$。

也可計算四角錐 G-$AQPR$ 以其他相鄰稜邊形成的平行四邊形為底的四角錐體積。

解法二

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可視為以 G 為頂點，平行四邊形 $AQPR$ 為底的四角錐，

故此四角錐體積為平行四邊形面積乘高的 $\frac{1}{3}$

由 $\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)\times(0,1,t)=(t-\frac{1}{2},t,-1)$ 得

$AQPR$ 的面積 $=|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}$

代點 $A(1,0,0)$ 得 $AQPR$ 所在平面的方程式為 $(t-\frac{1}{2})x+ty-z=t-\frac{1}{2}$

故高為點 $G(0,1,1)$ 到此平面的距離 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}$ ，

求得四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積 $\frac{1}{3}\times\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}=\frac{1}{6}$ 。

解法三

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可視為以 A 為頂點的三稜邊所形成向量 $\overrightarrow{AQ}$、$\overrightarrow{AR}$、$\overrightarrow{AG}$張出的平行六面體體積的 $\frac{1}{3}$ 。

由題意 $\overrightarrow{AQ}=(0,1,t)$ 、$\overrightarrow{AR}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$ 、$\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$ ，

所以平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix}0 & 1 & t\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}-t\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=|-(\frac{1}{2}-t)-t+1|=\frac{1}{2}$

故四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 。

也可計算以 $G\text{-}AQPR$ 其他稜邊形成的平行六面體體積。

解法四

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可分割成兩個三角錐 $A\text{-}GPQ$ 、 $A\text{-}GPR$ 。

三角形 GPQ 與三角形 GPR 均可視為底為 $\frac{1}{2}$ 、高為 1 的三角形，故其面積均為 $\frac{1}{4}$

又 A 到兩平面 GPQ 與 GPR 的距離均為 1

故兩三角錐的體積均為 $\frac{1}{12}$，得四角錐體積為 $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

第(4)小題（4 分）

解法一

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，$\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$

故平行四邊形 $AQPR$ 的面積為 $|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{(-\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^2+1}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

由第(3)小題知四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積為 $\frac{1}{6}$，

故四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的高即為題意所求距離 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

解法二

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，

平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的法向量為 $\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$

代 $A(1,0,0)$ 點可得此平面的方程式為 $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y-z+\frac{1}{4}=0$

故點 $G(0,1,1)$ 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離為 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

解法三

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，$\overrightarrow{RQ}$ 與 $\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{GP}$ 皆垂直。令 G 到直線 AP 的垂足為 S，

由三垂線定理，$\overrightarrow{GS}$ 也與 $\overrightarrow{RQ}$ 垂直，故 G 到直線 AP 的距離就是 G 到平面 $AQPR$ 的距離。由 $\Delta GPS\approx\Delta APC$ (AA 性質)得 $\dfrac{\overline{GS}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$，故所求距離 $\overline{GS}=\frac{\sqrt{2}}{3}$。