財團法人大學入學考試中心基金會

110 學年度指定科目考試試題

數學甲

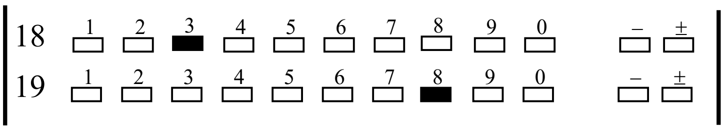
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

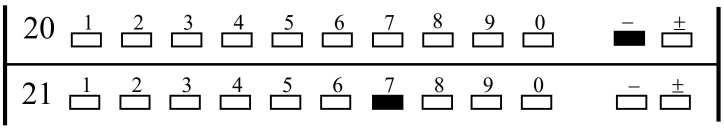
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定劃記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，恐將影響成績並損及權益。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 劃記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 劃記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 x_0、y_0 為正實數。若坐標平面上的點 $(10x_0, 100y_0)$ 在函數 $y=10^x$ 的圖形上，則點 $(x_0, \log y_0)$ 會在直線 $y=ax+b$ 的圖形上，其中 a、b 為實數。試問 $2a-b$ 的值為何？
   (1) 4
   (2) 9
   (3) 15
   (4) 18
   (5) 22

2. 研究團隊採用某快篩試劑的檢驗，以了解保護區內生物因環境汙染而導致體內毒素累積超過標準的比率。此試劑檢驗結果只有紅色、黃色兩種。
   依據過去的經驗得知：若體內毒素累積超過標準，經此試劑檢驗後，有 75%顯示為紅色；若體內毒素累積未超過標準，經此試劑檢驗後，有 95%顯示為黃色。已知此保護區的某類生物經試劑檢驗後，有 7.8%的結果顯示為紅色。假設此類生物實際體內毒素累積超過標準的比率為 p%，試選出正確的選項。
   (1) $1 \le p < 3$
   (2) $3 \le p < 5$
   (3) $5 \le p < 7$
   (4) $7 \le p < 9$
   (5) $9 \le p < 11$

3. 試求極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{10^{10}}{n^{10}}\left[1^9+2^9+3^9+\cdots+(2n)^9\right]$的值。

(1) 10^9

(2) $10^9\times(2^{10}-1)$

(3) $2^9\times(10^{10}-1)$

(4) $10^9\times 2^{10}$

(5) $2^9\times 10^{10}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 某電子公司有數百名員工，其用餐方式分為自備、外食兩種。經長期調查發現：若當日用餐為自備的員工，則隔天會有 10%轉為外食；若當日用餐為外食的員工，則隔天會有 20%轉為自備。

假設 x_0、y_0分別代表該公司今日用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例，其中 x_0、y_0皆為正數，且 x_n、y_n分別代表經過 n日後用餐自備人數與外食人數占員工總人數的比例。在該公司員工不變動的情形下，試選出正確的選項。

(1) $y_1=0.9y_0+0.2x_0$

(2) $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$

(3) 若 $\frac{x_0}{y_0}=\frac{2}{1}$，則 $\frac{x_n}{y_n}=\frac{2}{1}$對任意正整數 n均成立

(4) 若 $y_0>x_0$，則 $y_1>x_1$

(5) 若 $x_0>y_0$，則 $x_0>x_1$

5. 假設 $f(x)$ 為五次實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 x^n-1 的餘式為 $r_n(x)$，n 是正整數。試選出正確的選項。

(1) $r_1(x)=f(1)$

(2) $r_2(x)$ 是一次實係數多項式

(3) $r_4(x)$ 除以 x^2-1 所得的餘式等於 $r_2(x)$

(4) $r_5(x)=r_6(x)$

(5) 若 $f(-x)=-f(x)$，則 $r_3(-x)=-r_3(x)$

6. 一個標有 1 至 12 號格子的 12 格戳戳樂遊戲，每回遊戲以投擲一枚均勻銅板四次來決定要戳哪些格子。規則如下：

（一）第一次投擲銅板，若是正面，則戳 1 號格子；若是反面，則戳 3 號格子。

（二）第二、三、四次投擲銅板，若是正面，則所戳格子的號碼為前一次所戳格子的號碼加 1；若是反面，則所戳格子的號碼為前一次所戳格子的號碼加 3，依此類推。

例如：投擲銅板四次的結果依序為「正、反、反、正」，則會戳編號分別為 1、4、7、8 號的四個格子。

假設 p_m 代表在每回遊戲中 m 號格子被戳到的機率，試選出正確的選項。

(1) $p_2=\frac{1}{4}$

(2) $p_3=\frac{1}{2}$

(3) $p_4=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{2}p_3$

(4) $p_8>p_{10}$

(5) 在 4 號格子被戳到的條件下，3 號格子被戳到的機率為 $\frac{1}{2}$

7. 設 $F(x)$ 為一實係數多項式且 $F'(x)=f(x)$。已知 $f'(x)>x^2+1.1$ 對所有的實數 x 均成立，試選出正確的選項。

(1) $f'(x)$ 為遞增函數

(2) $f(x)$ 為遞增函數

(3) $F(x)$ 為遞增函數

(4) $\left[f(x)\right]^2$ 為遞增函數

(5) $f(f(x))$ 為遞增函數

8. 已知 z_1、z_2、z_3、z_4 為四個相異複數，且其在複數平面上所對應的點，依序可連成一個平行四邊形，試問下列哪些選項必為實數？

(1) $(z_1-z_3)(z_2-z_4)$

(2) $z_1-z_2+z_3-z_4$

(3) $z_1+z_2+z_3+z_4$

(4) $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$

(5) $\left(\dfrac{z_2-z_4}{z_1-z_3}\right)^2$

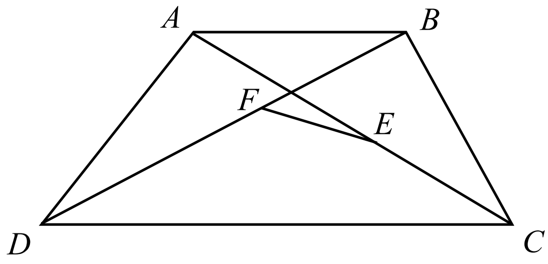
三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（9–22）。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 從 6、8、10、12 中任取三個相異數字，作為三角形的三邊長，且設此三角形的最大內角為 θ。在所有可能構成的三角形中，$\cos\theta$ 的最小值為 $\dfrac{⑨⑩⑪}{⑫⑬}$ 。（化成最簡分數）

B. 坐標平面上，一個半徑為 12 的圓與直線 $x+y=0$ 相交於兩點，且這兩點的距離為 8。若此圓與直線 $x+y=24$ 交於 P、Q 兩點，則線段 $\overline{PQ}$ 的長度為 ⑭$\sqrt{⑮}$ 。（化成最簡根式）

C. 考慮一梯形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$ 平行。已知點 E、F 分別在對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 上，且 $\overline{AB}=\frac{2}{5}\overline{DC}$ 、 $\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{EC}$ 、 $\overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{FD}$ ，如圖所示。



若將向量 $\overrightarrow{FE}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$，則實數 $\alpha=\dfrac{⑯}{⑰⑱}$ 、 $\beta=\dfrac{⑲⑳}{㉑㉒}$ 。

（化成最簡分數）

－ － －以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 － － －

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，該部分不予計分。每一子題配分標於題末。

一、坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0,-1,-1)$、$B(1,-1,-2)$、$C(0,1,0)$ 的平面。假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。根據上述，試回答下列問題。

(1) 試求四面體 $ABCH$ 的體積。（4 分）（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）

(2) 令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。（4 分）

(3) 試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在 ΔABC 的內部？並說明理由。（4 分）（註：三角形的內部不含三角形的三邊）

二、坐標平面上，以 Γ 表示多項式函數 $y=x^3-4x^2+5x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y=mx$，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。

(1) 當 $m=2$ 時，試求出在 $x\geq 0$ 的範圍內，Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標。（2 分）

(2) 承(1)，試求 Γ 與 L 所圍有界區域面積的值。（4 分）

(3) 在 $x\geq 0$ 的範圍內，若 Γ 與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，試求 a、b 之值。（6 分）

110 學年度指定科目考試
數學甲考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		5
2		2
3		4
4		2,3
5		1,3
6		1,3,4
7		2,5
8		2,4
A	9	—
	10	1
	11	1
	12	2
	13	4
B	14	8
	15	7
C	16	9
	17	2
	18	5
	19	—
	20	4
	21	2
	22	5

110 學年度指定科目考試

數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的《選才電子報》。

110 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

一、 坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0,-1,-1)$、$B(1,-1,-2)$、$C(0,1,0)$ 的平面。假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。根據上述，試回答下列問題。

(1) 試求四面體 $ABCH$ 的體積。（4 分）（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）

(2) 令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。（4 分）

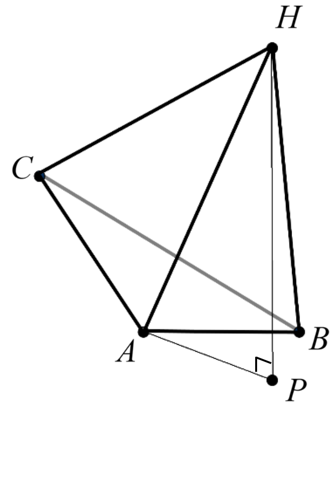
(3) 試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在 ΔABC 的內部？並說明理由。（4 分）（註：三角形的內部不含三角形的三邊）

第(1)小題

由於 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 在平面 E 上且 $3\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 與 E 垂直。

故依題意 H 到 E 的距離為 $3\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$。

由 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，得 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$



以下列出二種解法解出四面體體積

【解法一】

ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{2}$

四面體 $ABCH$ 的高為 $3|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=9$，

所以，四面體 $ABCH$ 的體積 $=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 9=\frac{9}{2}$。

【解法二】

ΔABC 的面積乘以 H 到平面 E 的高是以 ΔABC 為底的三角柱體積。因此四面體 $ABCH$ 的體積為 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AH}$ 所展成的平行六面體體積的 $\frac{1}{6}$。

計算 $\overrightarrow{AH}=(\frac{20}{3},-\frac{11}{3},5)$，利用行列式求 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AH}$ 所展成的平行六面體體積，可得

四面體 $ABCH$ 的體積 $=\frac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{20}{3} & -\frac{11}{3} & 5 \end{vmatrix}\right|=\frac{9}{2}$

或者

$\frac{1}{6}\times|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AH}|=\frac{1}{6}\times(\frac{40}{3}+\frac{11}{3}+10)=\frac{9}{2}$

第(2)小題：

設 P 為 H 對平面 E 的投影點，由前知 $\overrightarrow{PH}=3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。

由於 $\overrightarrow{PH'}=-\overrightarrow{PH}$ 故知 $\overrightarrow{AH'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(\frac{-16}{3},\frac{7}{3},-7)$。

因而得 H' 之坐標為 $(\frac{-16}{3},\frac{7}{3},-7)+(0,-1,-1)=(\frac{-16}{3},\frac{4}{3},-8)$。

此小題若用點的概念出發解題，而不是向量，則須先求出點 H 坐標 $(\frac{20}{3},\frac{-14}{3},4)$、平面 E 方程式 $2x-y+2z=-1$，再利用直線參數式寫出直線 $\overline{HP}$ 上的點，例如 $(\frac{20}{3}+2t,\frac{-14}{3}-t,4+2t)$，解得 $t=-3$，再求得 H' 之坐標為 $(\frac{-16}{3},\frac{4}{3},-8)$。這兩個解法解題概念相同，但此解法過程和計算皆相當複雜。

第(3)小題： H 對平面 E 的投影點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

P 點在 ΔABC 內部若且唯若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，其中 $r>0,s>0$ 且 $r+s<1$。由第(1)與(2)小題知 H' 對平面 E 的投影點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $r=\frac{2}{3},s=\frac{-1}{3}$，故由 $s<0$ 知 P 點在 ΔABC 外部。

此小題也可求出投影點 $P(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},-2)$，因為點 P 在平面 $y=-\frac{5}{3}$ 上，而三角形 A、B、C 三點皆在該平面之同側，即 $y>-\frac{5}{3}$。故投影點在三角形外部。

第二題

二、坐標平面上，以 Γ 表示多項式函數 $y=x^3-4x^2+5x$ 的圖形，且以 L 表示直線 $y=mx$，其中 m 為實數。根據上述，試回答下列問題。

(1) 當 $m=2$ 時，試求出在 $x\geq 0$ 的範圍內，Γ 與 L 的三個相異交點的 x 坐標。（2 分）

(2) 承(1)，試求 Γ 與 L 所圍有界區域面積的值。（4 分）

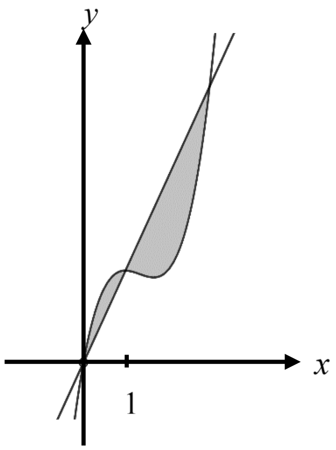
(3) 在 $x\geq 0$ 的範圍內，若 Γ 與 L 有三個相異交點，則滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，試求 a、b 之值。（6 分）

第(1)小題

解 $x^3-4x^2+5x-2x=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=0,1,3$

故 x 坐標為 $0,1,3$。



第(2)小題

當 $0\leq x\leq 1$ 時 $x^3-4x^2+5x\geq 2x$；

而當 $1\leq x\leq 3$ 時 $x^3-4x^2+5x\leq 2x$，

在此範圍外 $y=x^3-4x^2+5x$ 和 $y=2x$ 的圖形不再相交，

故所圍有界區域面積為

$$\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3 -(x^3-4x^2+3x)dx$$

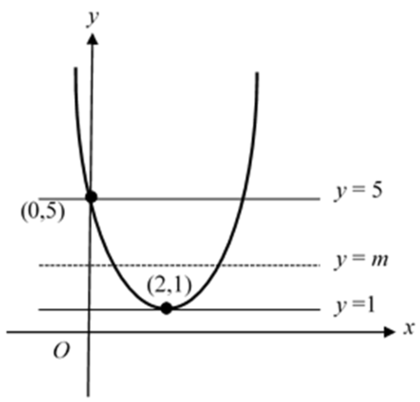
$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^1\right)-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_1^3\right)$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}$$

第(3)小題

【解法一】

由 $x^3-4x^2+5x-mx=x(x^2-4x+5-m)$ 知原點必為 Γ 與 L 的一個交點。因此滿足題設的 m 需滿足 $x^2-4x+5-m=0$ 有兩相異正實根。



考慮二次函數 $y=x^2-4x+5$ 的圖形與直線 $y=m$ 的交點。

由於 $y=x^2-4x+5$ 的極小值發生於 $2x-4=0$，即 $(2,1)$ 為 $y=x^2-4x+5$ 的頂點。故知 $m>1$ 才會有兩相異交點。

又 $y=x^2-4x+5$ 和 y 軸交於 $(0,5)$。故 $m<5$ 才會使得兩交點的 x 坐標為正。

因此滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。

以上也可用二次函數的判別式與根與係數的性質求出 m 之最大範圍。例如 $x^2-4x+5-m=0$ 有兩相異實根的充要條件為 $16-4(5-m)>0$ 得 $m>1$。

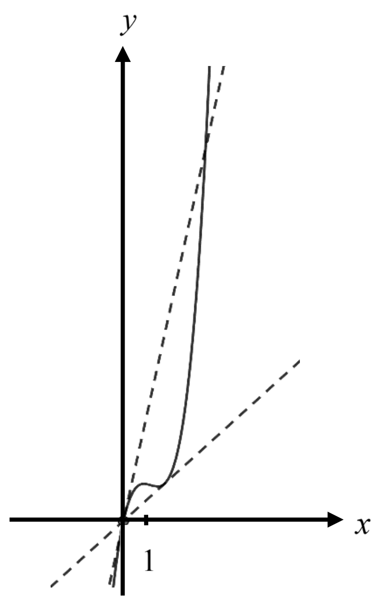
又此兩根需為正，由兩根之和為 4，故知兩根為正的充要條件為兩根之積 $5-m>0$，即 $m<5$。

因此滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。

【解法二】

當 Γ 與 L 相切時，交點個數小於 3，故可先考慮通過原點之 Γ 的切線。當切點在原點時，切線斜率 5。當切點 $(x_0, x_0^3-4x_0^2+5x_0)$ 不在原點時，其切線斜率為 $3x_0^2-8x_0+5$，而該點和原點連線之斜率為 $x_0^2-4x_0+5$，故 x_0 需滿足 $3x_0^2-8x_0+5=x_0^2-4x_0+5$，

得 $x_0=2$。得兩切線斜率分別為 5 和 1。



由圖形可知，當 $1<m<5$ 時，Γ 與 L 三個相異交點皆在 $x\geq 0$ 的範圍內；而當 $m<1$ 時，Γ 與 L 只交於原點；又當 $m>5$ 時，Γ 與 L 的交點除原點外，另外兩個交點的 x 坐標分別為一正一負。

故滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。