

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：統計學

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、行政院主計總處對家戶所得與消費支出之關係，作了一些研究。將所得與消費支出分別以  $X$  與  $Y$  表示。已知  $(X, Y)$  之聯合動差母函數 (joint moment generating function) 為  $M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp\{2t_1 + t_2 + 0.5t_1t_2 + 2.5t_1^2 + 2t_2^2\}$ 。

請回答下列問題：(每小題 10 分，共 40 分)

(一) 求出給定消費支出  $Y=1$  之下，所得  $X$  之條件機率密度函數。(二) 求出條件期望值  $E(X|Y)$  之變異數  $\text{Var}[E(X|Y)]$ 。(三) 求出消費支出為 1 之下，所得大於 2 之條件機率  $P(X > 2|Y=1)$ 。(四) 令隨機變數  $Z = (Y-1)^2$ ，求出  $Z$  之機率密度函數。

二、針對家戶之所得 (以  $X$  表示) 與消費支出 (以  $Y$  表示) 之關係，考慮建立下列迴歸模型： $Y_i = \beta_1 \sqrt{X_i} + \varepsilon_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ；其中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$  為相互獨立且具常態分配  $N(0, \sigma^2)$  之隨機變數。

請回答下列問題：(每小題 10 分，共 40 分)

(一) 求出  $\beta_1$  之最小平方估計量  $\hat{\beta}_1$ 。(二) 求出題(一)中， $\hat{\beta}_1$  之變異數  $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ 。(三) 欲檢定  $H_0: \beta_1 = 0$  vs.  $H_1: \beta_1 \neq 0$ ，已收集下列資料

$X_i$	4	9	4	16	1
$Y_i$	2	5	2	10	1

請利用收集之資料，以 0.05 之顯著水準，檢定上述之假設。

(註：若令  $T(d)$  為具有自由度為  $d$  之  $t$  分配的隨機變數，則已知  $P(T(3) < 2.353) = 0.95$ ,  $P(T(3) < 3.182) = 0.975$ ,  $P(T(4) < 2.132) = 0.95$ ,  $P(T(4) < 2.776) = 0.975$ )(四) 若真實之迴歸模型為  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{X_i} + \varepsilon_i$ ，請用題(一)之  $\hat{\beta}_1$  去估計真實模型中之  $\beta_1$ ，求出其偏誤 (bias)。

三、為了降低流行性感冒對民眾造成的傷害和損失，政府從民國 106 年 10 月 1 日起開始針對特定對象，提供免費流感疫苗接種服務。假設已知臺北市某區之衛生所平均要等 10 分鐘，才會有一位民眾上門接受免費疫苗接種服務。

請回答下列問題：(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 求出某日該衛生所從早上 8 點整上班到下午 5 點整下班都沒有民眾上門接種免費疫苗之機率。

(二) 令變數  $S$  為該衛生所從早上 8 點上班後，直到等到第 100 位民眾上門接種免費疫苗所需等候時間 (單位：小時)，求出變數  $S$  之變異數  $\text{Var}(S)$ 。